ANALELE UNIVERSITATII BUCURESTI

MATEMATICĂ - MECANICĂ

ANUL XXI — Nr. 1 — 1972

ANALELE UNIVERSITĂȚII BUCUREȘTI

MATEMATICĂ—MECANICĂ

ANUL XXI — Nr. 1 — 1972

MATEMATICĂ — MECANICĂ

REDACŢIA
ANALELE UNIVERSITĂŢII BUCUREŞTI
Şos. Panduri nr. 90
Telefon 314000/131

SOMMAIRE

SUMAR

TEOREMA CREȘTERILOR FINITE PENTRU APLICAȚII ÎNTRE SPAȚII LOCAL CONVEXE

OLIMPIA CRISTINA ANDONIE

În [2] se demonstrează formula lui Lagrange pentru funcționale diferențiabile Gâteaux definite pe o mulțime convexă dintr-un spațiu vectorial topologic real, care se generalizează apoi la aplicații diferențiabile Gâteaux, definite într-o mulțime convexă dintr-un spațiu local convex E cu valori în alt spațiu local convex F.

În [1] se demonstrează teorema creșterilor finite pentru aplicații diferențiabile Fréchet între două spații Banach. Folosind noțiunea de diferențială dată în [3] în nota de față se demonstrează teorema creșterilor finite pentru aplicații diferențiabile între spații local convexe utilizînd metoda lui H.Cartan.

1. Fie E și F două spații local convexe separate ale căror topologii sînt date de familiile A, respectiv B, de seminorme continue definite pe E, respectiv F. Aplicația liniară $T : E \to F$ este continuă dacă și numai dacă pentru price $\beta \in B$ există $\alpha \in A$ și o constantă $M_{\beta\alpha} \geqslant 0$ astfel ca $|Tx|_\beta \leqslant M_{\beta\alpha} |x|_\alpha$ oricare ar fi $x \in E$. Se pune astfel în evidență o aplicație $\varphi : B \to A$ și notăm cu $\mathcal{L}_\varphi(E, F)$ mulțimea aplicațiilor liniare și continue astfel obținute.

Fie $x_0 \in E$, U o vecinătate convexă a lui x_0 și aplicația $f : U \to F$.

Definiția 1. Aplicația $T \in \mathcal{L}_\varphi(E, F)$ se numește diferențiala (Fréchet) a funcției f în punctul $x_0 \in U$ dacă pentru orice $\beta \in B$ are loc relația:

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ x_0 + h \in U}} \frac{|f(x_0 + h) - f(x_0) - Th|_\beta}{|h|_{\varphi(\beta)}} = 0$$

$\left(\text{Se presupune că se ia valoarea o pentru fracțiile } \frac{0}{0}\right)$.

Notăm $T = f'(x_0)$

Definiția 2. Aplicația f este derivabilă în U dacă pentru orice $x \in U$ funcția este diferențiabilă în x și $f'(x) \in \mathcal{L}_\varphi(E, F)$. φ fiind independent de x.

Ca și în cazul spațiilor Banach se demonstrează că diferențiala astfel definită este unică; de asemenea se demonstrează teorema de derivare a aplicației compuse.

2. Fie acum $E = \mathcal{R}$, F un spațiu local convex ca mai sus, $a, b \in \mathcal{R}$, $a < b$ și f o funcție continuă $f: [a, b] \to F$ diferențiabilă în orice punct $x_0 \in (a, b)$.

În acest caz

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Formula creşterilor finite pentru funcţionale. Fie $f : [a, b] \to F$ *o aplicaţie continuă şi o familie* $\{g_\beta\}_{\beta \in B}$ *de aplicaţii continue* $g_\beta : \mathcal{R} \to \mathcal{R}$. *Presupunem că aplicaţiile* f *şi* g_β, *oricare ar fi* $\beta \in B$, *sînt derivabile în orice punct din* (a, b) *şi pentru orice* $x \in (a, b)$, *orice* $\beta \in B$ *avem* $|f'(x)|_\beta \leqslant g'_\beta(x)$. *Atunci avem:*

$$|f(b) - f(a)|_\beta \leqslant g_\beta(b) - g_\beta(a)$$

oricare ar fi $\beta \in B$.

Demonstraţie. Fie $\varepsilon > 0$. Vom arăta că pentru orice $\beta \in B$ are loc inegalitatea:

(1) $|f(x) - f(a)|_\beta \leqslant g_\beta(x) - g_\beta(a) + \varepsilon(x - a)$ oricare ar fi $x \in [a, b]$. Pentru $x = b$ vom face pe ε să tindă la zero.

Fie $\mathcal{U}$ mulţimea punctelor din $[a, b]$ pentru care $|f(x) - f(a)|_\beta > g_\beta(x) - g_\beta(a) + \varepsilon(x - a)$

Vom arăta că $\mathcal{U}$ este vidă. Observăm că ambii membri ai inegalităţii sînt funcţii continue. Mulţimea punctelor pe care o funcţie continuă este strict pozitivă fiind deschisă rezultă că $\mathcal{U}$ este deschisă. Presupunînd că $\mathcal{U}$ nu e vidă fie c marginea sa inferioară. Remarcăm că $a < c < b$ şi $c \notin \mathcal{U}$ Deoarece $a < c < b$ putem aplica ipoteza: oricare ar fi $\beta \in B$ avem

$$|f'(c)|_\beta \leqslant g'_\beta(c).$$

Din definiţia cantităţilor $f'(c)$ şi $g'(c)$ se poate determina un interval $c \leqslant x \leqslant c + \eta (\eta > 0)$ în care avem

$$|f'(c)|_\beta \geqslant \frac{|f(x) - f(c)|_\beta}{x - c} - \frac{\varepsilon}{2}, \quad g'(c) \leqslant \frac{g_\beta(x) - g_\beta(c)}{x - c} + \frac{\varepsilon}{2}$$

oricare ar fi $\beta \in B$. Ţinînd seama de aceste trei inegalităţi avem:

$$|f(x) - f(c)|_\beta \leqslant g_\beta(x) - g_\beta(c) + \varepsilon(x - c), \text{ oricare ar fi } \beta \in B.$$

Deoarece $c \notin \mathcal{U}$ avem pentru orice $\beta \in B$

$$|f(c) - f(a)|_\beta \leqslant g_\beta(c) - g_\beta(a) + \varepsilon(c - a)$$

Combinînd aceste două relaţii obţinem:

$$|f(x) - f(a)|_\beta \leqslant |f(x) - f(c)|_\beta + |f(c) - f(a)|_\beta \leqslant g_\beta(x) - g_\beta(a) +$$

$$+ \varepsilon(x - a) \text{ oricare ar fi } \beta \in B,\ c \leqslant x \leqslant c + \eta.$$

Prin urmare, oricare ar fi $x \leqslant c + \eta$ inegalitatea (1) rămîne adevărată, fapt ce vine în contradicţie cu proprietatea lui c de a fi margine inferioară. Deci $\mathcal{U}$ este vidă.

Dacă $g_\beta(x) = k_\beta x (k_\beta \geqslant 0)$ avem:

Corolar. Dacă $f : [a, b], \to F$ *este continuă şi derivabilă în orice punct* $x \in (a, b)$, *dacă pentru orice* $\beta \in B$ *avem*

$$|f'(x)|_\beta \leqslant k_\beta \qquad (k_\beta \geqslant 0), \text{ atunci}$$

$|f(b) - f(a)|_\beta \leqslant k_\beta (b - a)$ *sau în general oricare ar fi* $x_1, x_2 \in (a, b)$.

$|f(x_2) - f(x_1)|_\beta \leqslant k_\beta |x_2 - x_1|$, *oricare ar fi* $\beta \in B$, *adică* f *este* k — *Liptschitziană.*

3. În continuare se vor considera aplicaţii între spaţii local convexe.

Fie E şi F spaţii local convexe ca mai sus. Dacă $a, b \in E$ mulţimea $\{x \in E, x = (1 - t) a + tb, 0 \leqslant t \leqslant 1\}$ se numeşte segment de extremităţi, a, b. Fie U o mulţime convexă din E.

Formula creşterilor finite pentru aplicaţii cu valori în F.

Dacăf : U $\to F$ *este continuă şi derivabilă în U atunci*

$$|f(b) - f(a)|_\beta \leqslant |b - a|_{\varphi(\beta)} \sup_{0 \leqslant t \leqslant 1} |f'((1 - t)a + tb)|_{\beta, \varphi(\beta)} \text{ oricare ar fi } \beta \in B.$$

Demonstraţie. Fie $h(t) = f((1 - t) a + tb)$ Funcţia $h : [0,1] \to F$ este derivabilă în raport cu t.

Aplicînd regula de derivare a funcţiilor compuse avem:

$$h'(t) = f'((1 - t)a + tb). (b - a) \text{ şi deci:}$$

$$|h'(t)|_\beta \leqslant |f'((1 - t) a + tb)|_{\beta, \varphi(\beta)} \, |b - a|_{\varphi(\beta)}$$

Aplicînd funcţiei h corolarul precedent obţinem:

$$|h(1) - h(0)|_\beta \leqslant \sup_{0 \leqslant t \leqslant 1} |h'(t)|_\beta \, |b - a|_{\varphi(\beta)}$$

oricare ar fi $\beta \in B$. Făcînd înlocuirile corespunzătoare, obţinem inegalitatea propusă.

Corolar. Dacă pentru orice $x \in$ U, *orice* $\beta \in B$ *avem* $|f'(x)|_{\beta, \varphi(\beta)} \leqslant k_{\beta, \varphi(\beta)}$ *atunci* f *este* $k_{\beta, \varphi(\beta)}$ — *Lipschitziană. Dacă* $f'(x) = 0$ *pentru orice* $x \in$ U *atunci* f *e constantă în* U.

BIBLIOGRAFIE

1. H. Cartan: *Calcul différentiel*, Hermann Paris, Collection Méthodes, 1967.
2. Gh. Marinescu: *Spaţii vectoriale topologice şi pseudotopologice*, Bucureşti, Edit. Acad. R.P.R. 1949.
3. Gh. Marinescu: *Différentielles de Gâteaux et Fréchet dans les espaces localement convexes.* Bull. Math. Soc. Sci. Math. Phys., R.P.R., vol. 1, p. 77—86 (1957).

ТЕОРЕМА КОНЕЧНЫХ ПРИРАЩЕНИЙ ДЛЯ АППЛИКАЦИЙ МЕЖДУ ЛОКАЛЬНО ВЫПУКЛЫМИ ПРОСТРАНСТВАМИ

Краткое содержание

В работе (2) доказывается формула Лагранжа для функционалов дифференцируемых по Гато, определенных на некотором выпуклом множестве действительного топологического векторного пространства, которая обобщается на функции, дифференцируемые по Гато, определенные на некотором локально выпуклом пространстве E со значениями в другом локально выпуклом пространстве.

В (1) доказывается теорема Лагранжа, для функций дифференцируемых по Фреше между двумя пространствами Банаха. Используя понятие дифференциала, данное в (3), в настоящей заметке доказывается теорема конечных приращений для дифференцируемых аппликаций между локально выпуклыми пространствами, применяя метод Картана.

LE THÉORÊME D'ACCROISSEMENTS FINIS POUR LES APPLICATIONS ENTRE LES ESPACES LOCALEMENT CONVEXES

Résumé

Dans [2] on démontre la formule de Lagrange pour des fonctionnelles différentiables Gâteaux définies dans une partie convexe d'un espace vectoriel topologique réel. Cette formule est généralisée pour les applications différentiables définies dans une partie convexe d'un espace localement convexe E à valeurs dans un espace localement convexe F.

Dans [1] le théorème de Lagrange est démontré pour une application différentiable Fréchet dans le cas des espaces de Banach. En utilisant la notion de différentielle donnée dans [3], on démontre maintenant le théorème d'accroissements finis pour une application entre deux espaces localement convexes, en suivant la méthode de H. Cartan.

PRIMITĂ LA 24 IV 1971

UNIVERSITATEA BUCUREŞTI
FACULTATEA DE MATEMATICĂ-MECANICĂ

SISTEM DE SERVIRE GI/G/ s CU RESTRICŢII ASUPRA TIMPULUI DE AŞTEPTARE

D. FIRESCU, ANETA MUJA, P. BALEA

Sistemele de servire M/M/s şi M/G/s au fost investigate de Barrer 1, Gaver, etc. În această lucrare se dă o metodă generală de studiu pentru sisteme GI/G/S, în ipoteza unor restricţii asupra timpului de aşteptare. Se consideră sistemul stochastic de servire GI/G/s cu s staţii în paralel în care cerinţele sosesc la momentele aleatoare $o \leqslant t_1 \leqslant t_2 \leqslant \ldots \leqslant t_n \leqslant \ldots$ O cerinţă care intră în sistem şi nu găseşte nici o staţie liberă, aşteaptă o perioadă de timp τ după care, dacă nu intră în staţie, părăseşte sistemul. Se studiază cazurile $\tau =$ const. şi τ — variabilă aleatoare cu repartiţia G. Se deduc ecuaţiile care descriu procesul şi se calculează timpul mediu de aşteptare precum şi probabilitatea ca cerinţele să părăsească sistemul fără a fi servite.

Să considerăm sistemul stochastic de servire GI/G/s, cu s staţii în paralel, în care cerinţele sosesc la momentele aleatoare $0 \leqslant t_1 \leqslant t_2 \leqslant \leqslant \ldots \leqslant t_n \leqslant \ldots$, iar creşterile $t_n - t_{n-1}$, $n \in N$ au funcţia de repartiţie A cu valoarea medie finită $a(o < a < \infty)$. Durata servirii este reprezentată printr-o variabilă aleatoare cu densitatea de repartiţie h şi valoarea medie $b(0 < b < \infty)$.

La intrarea în sistem a unei cerinţe se pot prezenta două situaţii:

— cel puţin o staţie este liberă şi începe imediat serviciul cerinţei nou sosite;

— nici o staţie nu este liberă şi cerinţa ia loc în şirul de aşteptare, format în ordinea intrărilor în sistem. În această situaţie admitem că cerinţa aşteaptă o perioadă de timp τ, după care, dacă nu intră în staţie, părăseşte sistemul.

Se poate considera atît cazul $\tau =$ constant cît şi cazul cînd τ este o variabilă aleatoare cu repartiţia G. Sistemele M/M/s şi M/G/s construite în acest mod au fost investigate de Barrer [1], Gaver şi alţii. Vom da o metodă mai generală de studiu a sistemelor GI/G/s, în ipoteza existenţei restricţiilor de mai sus asupra timpului de aşteptare.

Observăm mai întîi că dacă $\tau =$ constant, numărul de cerinţe existente în sistem nu mai poate fi reprezentat printr-un proces Markov. Într-adevăr, dacă la momentul t $(t > 0)$ se află în sistem m cerinţe, atunci starea sistemului la momentul $t + \Delta t$ depinde nu numai de m şi t, ci şi de lungimea perioadei de aşteptare a cerinţelor care au sosit pînă în momentul t.

Putem considera deci un proces stochastic n — dimensional $\xi(t) = \{\xi_1(t), \ldots, \xi_s(t);\ t > 0\}$ unde $\xi_i(t)$ $(i = 1, \ldots, s)$ reprezintă timpul

ce se scurge din momentul t pînă în momentul eliberării stației i ($i = 1, ..., s$), care servește cerințe ce au sosit înainte de momentul t. Dacă la momentul t stația $i(i = 1, ..., s)$ este liberă iar în sistem nu așteaptă nici o cerință avem $\xi_i(t) = 0$.

Fie $\xi(t) = \min_i \xi_i(t)$ $(i = 1, ..., s)$. Dacă $u > t > 0$ și $\xi(u - 0) = 0$, atunci cerința care sosește în momentul u intră imediat în stația liberă. Corespunzător $\xi_i(t)$ vor crește de la 0 (pentru u-0) pînă la o valoare egală cu durata serviciului acelei cerințe care sosește în momentul $u + 0$. Dacă $\xi(u\text{-}0) \neq 0$ vom considera cazurile:

1° $\xi(u - o) > \tau$, cînd sosirea unei noi cerințe nu influențează vectorul $\xi(u + o)$, deoarece ea părăsește sistemul fără a aștepta începutul servirii:

2° $\xi(u - o) \leqslant \tau$ În acest caz, componenta pentru care $\xi_i(u - o) = \xi(u - o)$ crește odată cu durata serviciului cerinței nou sosite.

Avem

$$\xi_i(u + o) = \xi_i(u - o) + \frac{\eta}{2}[1 + \operatorname{sgn}(\tau - \xi(u - o)]$$

unde η reprezintă perioada de timp în care este servită cerința care sosește în sistem în momentul $u > t$. Dacă $\xi(u - o)$ sau $o < \xi(u - o) \leqslant \tau$ atunci $\operatorname{sgn}(\tau - \xi) = 1$ și ξ_i crește cu η. Dacă $\xi(u - o) > \tau$, atunci $\operatorname{sgn}(\tau - \xi(u - o)) = -1$ și $1 + \operatorname{sgn}(\tau - \xi(u - o) = 0$.

O cerință care sosește în momentul $t > 0$, intră în stația i dacă și numai dacă $\xi_i(t - o) = \min_k \xi_k(t - o)$, $k = 1, ..., s$.

Să presupunem că la momentul $t(t > 0)$ sînt ocupate k stații numerotate cu $j_1, ..., j_k (k = 1, ..., s)$ și să notăm

$$F_k(t, x_1, ..., x_k) = P\{t;\ \xi_{j_1}(t) < x_1, ..., \xi_{j_k}(t) < x_k;\ \xi_i(t) = o;$$

$$i \neq j_\alpha,\ \alpha = 1, ..., k;\ 1 \leqslant k \leqslant s;\ x_{j_\alpha} > 0\}$$

$$F_s(t) = P\{\xi(t) = 0\}$$

Admițînd că există densitatea de probabilitate $f_k(t, x_1, ..., x_k)$ și $f_0(t)$ și ținînd seama că starea $\xi(t + \Delta t) = 0$ este posibilă numai dacă $\xi(t) = 0$ și în intervalul de timp $(t, t, + \Delta t)$ n-a sosit nici o altă cerință, sau dacă în momentul t $(t > 0)$ a fost ocupată o stație care s-a eliberat pînă în momentul $t + \Delta t$, rezultă

$$f_0(t + \Delta t) = f_0(t)\ (1 - a\Delta t) + sf_1(t, o)\ \Delta t + o(\Delta t)$$

de unde

$$f_0'(t) = -af_0(t) + sf_1(t, 0) \tag{1}$$

Obținem deasemenea

$$f_k(t + \Delta t, x_1, ..., x_k) = (1 - a\Delta t)\ f_k(t, x_1 + \Delta t, ..., x_k + \Delta t) +$$

$$+ (s - k)\ \Delta t f_{k+1}(t, x_1 + \Delta t, ..., x_k + \Delta t, o) + \frac{a\Delta t}{s - k + 1} \sum_{i=1}^{k} f_{k-1}(t, x_1 +$$

$$+ \Delta t, ..., x_{i-1} + \Delta t, x_{i+1} + \Delta t, ..., x_k + \Delta t)\ h(x_i) + o(\Delta t) \tag{2}$$

Însă

$$f_k(t, x_1 + \Delta t, \dots, x_k + \Delta t) = f_k(t, x_1, \dots, x_k) + \sum_{i=1}^{k} [f_k(t, x_1 +$$

$$+ \Delta t, \dots, x_i + \Delta t, x_{i+1}, \dots, x_k) - ; f_k(t, x_1 + \Delta t, \dots, x_{i-1} + \Delta t, x_i, \dots, x_k)]$$

Folosind această identitate și trecînd la limită pentru $\Delta t \to 0$ în ecuația (2) obținem

$$\frac{\partial f_k}{\partial t} - \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial f_k}{\partial x_i} = a f_k(t, x_1, \dots, x_k) + (s - k) f_{k+1}(t, x_1, \dots, x_k, 0) +$$

$$+ \frac{a}{s - k + 1} \sum_{i=1}^{k} f_{k-1}(t, x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_k) h(x_i) \; (1 \leqslant k \leqslant s) \qquad (3)$$

Dacă toate stațiile sînt ocupate (k = s) ecuația (3) suferă unele modificări, care decurg din faptul că dacă min $(x_1, \dots, x_s) \leqslant \tau$ atunci cerința nou sosită rămîne în sistem, iar dacă min $(x_1, \dots, x_s) > \tau$ starea sistemului nu se schimbă (deoarece cerința nou sosită părăsește sistemul înainte de eliberarea unei stații).

Așadar

$$f_s(t + \Delta t, x_1, \dots, x_s) = (1 - a\Delta t) f_s(t, x_1 + \Delta t, \dots, x_s + \Delta t) +$$

$$+ a\Delta t \sum_{i=1}^{s} f_{s-1}(t, x_1 + \Delta t, \dots, x_{i-1} + \Delta t, x_{i+1} + \Delta t, \dots, x_s + \Delta t) h(x_i) +$$

$$+ a\Delta t \sum_{i=1}^{s} \left[\int_0^m f_s(x_1, \dots, x_{i-1}\, z, x_{i+1}, \dots, x_s h(x_i - z)\, dz \right] + o(\Delta t) \qquad (4)$$

unde $m = \min (x_1, \dots, x_s) \leqslant \tau$, iar $0 \leqslant z \leqslant \min (\tau, x_1, \dots, x_s)$.

Această ecuație este adevărată și pentru min $(x_1, \dots, x_s) > \tau$ dacă primul termen din partea dreaptă se înlocuiește prin $f_s(t, x_1 + \Delta t, \dots, x_s + \Delta t)$. Trecînd la limită pentru $\Delta t \to 0$ în ecuația (4) rezultă

$$\frac{\partial f_s}{\partial t} - \sum_{i=1}^{s} \frac{\partial f_s}{\partial x_i} = - a f_s(t, x_1, \dots, x_s) + a \sum_{i=1}^{s} f_{s-1}(t, x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_s) h(x_i) +$$

$$+ a \sum_{i=1}^{s} \left[\int_0^m f_s(x_1, \dots, x_{i-1}, z, x_{i+1}, \dots, x_s) h(x_i - z)\, dz \right. \qquad (5)$$

În particular, dacă $h(x) = \frac{1}{b} e^{-\frac{x}{b}}$, $0 \leqslant x < \infty$ iar $f_k(t, x_1, \dots, x_k) = f_k(x_1, \dots, x_k) =$

$= f_k = \alpha_k e^{-\frac{1}{b} \sum_{i=1}^{k} x_i}$ (α_k = constant) atunci din ecuația (1) găsim $\alpha_1 = f_0 \frac{a}{s}$.

Folosind (3) deducem

$$\alpha_k = f_0 \frac{a^k(s-k)!}{s!} \; (1 \leqslant k \leqslant s)$$

Rezultă

$$f_k = f_0 \frac{a^k(s-k)!}{s!} e^{-\frac{1}{b}\sum_{i=1}^{k} x_i} \; (1 \leqslant k \leqslant s)$$

$$f_s(x_1, \dots, x_{i-1}, o, x_{i+1}, \dots, x_s) = f_0 \frac{a^s}{s!} e^{-\frac{1}{b}(x_1 + \dots + x_{i-1} + x_{i+1} + \dots + x_s)}$$

$$f_s(x_1, \dots, x_s) = f_s = f_0 \frac{a^s}{s!} e^{-\frac{1}{b}(x_1 + \dots + x_s) + a \min(\tau, x_1, \dots, x_s)}$$

unde

$$f_0^{-1} = \begin{cases} \sum_{k=0}^{s-1} \frac{s^k}{k!} + \frac{s^s}{s!}(1+a) & \text{dacă } ab \neq s \\ \sum_{k=0}^{s-1} \frac{(ab)^k}{k!} + \frac{\frac{s}{b} - ae^{-\frac{1}{b}(s-ab)\tau}}{\frac{s}{b} - a} \frac{(ab)^s}{s} & \text{dacă } ab = s. \end{cases}$$

Cunoscînd f_0 se poate calcula timpul mediu de aşteptare $W(\tau)$ precum şi probabilitatea $P\{\xi_i > \tau;\ i = 1, \dots, s\}$ ca cerinţele să părăsească sistemul fără a fi servite. Obţinem

$$W(\tau) = \begin{cases} \frac{\tau(2 + a\tau)}{2} \frac{(ab)^s}{s!} \cdot f_0, & \text{dacă } ab \neq s \\ \frac{\frac{s}{b} - e^{-\left(\frac{s}{b} - a\right)\tau}\left[\frac{s}{b} + a\tau\left(\frac{s}{b} - a\right)\right]}{\left(a - \frac{s}{b}\right)^2} \frac{(ab)^s}{s!} f_0, & \text{dacă } ab = s \end{cases}$$

$$P\{\xi_i > \tau;\ \ i = 1, \dots, s\} = e^{-\frac{s}{b}(s-ab)} \cdot \frac{(ab)^s}{s!} f_0$$

În cazul cînd τ este o variabilă aleatoare cu repartiţia G introducem vectorul

$$\overline{\xi}_n = (\xi_{n_1}, \dots, \xi_{n_s}),$$

unde ξ_{n_j} $(j = 1, \dots, s)$ reprezintă momentul în care staţia j ar putea începe servirea celei de a n-a cerinţe, cu condiţia $\xi_{n_1} \leqslant \xi_{n_2} \leqslant \dots \leqslant \xi_{n_s}$.

Notînd

θ_n = timpul necesar pentru servirea celei de a n-a cerințe

$T_n = t_{n+1} - t_n$;

τ_n = variabila aleatoare care mărginește timpul de rămînere în sistem a celei de a n-a cerințe;

putem lua

$$\xi_{n+1,1} = \begin{cases} \max\,[0,\ \xi_{n_1} - T_n + \theta_n], & \text{dacă } \xi_{n_1} + \theta_n \leqslant \tau_n \\ \max\,[0,\ \tau_n - T_n], & \text{dacă } \xi_{n_1} \leqslant \tau_n \leqslant \xi_{n_1} + \theta_n \\ \max\,[0,\ \xi_{n_1} - T_n], & \text{dacă } \xi_{n_1} \geqslant \tau_n \end{cases}$$

$$\xi_{n+1,j} = \max\,[0,\ \xi_{n_j} - T_n], \quad (1 < j \leqslant s)$$

Aici am presupus că variabilele θ_n, T_n și τ_n sînt independente în totalitate.

Rezultă

$$\overline{\xi}_{n+1} = (\xi_{n+1,j_1},\ \xi_{n+1,j_2}, \dots,\ \xi_{n+1,j_s})$$

cu

$$\xi_{n+1,j_1} \leqslant \xi_{n+1,j_2} \leqslant \dots \leqslant \xi_{n+1,j_s}$$

Fie

$$F_n(x_1, \dots, x_s/y_1, \dots, y_s) = P\,\{\xi_{n_1} \leqslant x_1, \dots, \xi_{n_s} \leqslant x_s/\xi_{11} = y_1, \dots, \xi_{1s} = y_s\} \text{ cu } y_i \leqslant y_{i+1},\ y_i > 0,\ (i = 1, \dots, s-1) \text{ și}$$

$$F_n(x_1, \dots, x_s/0) = F_n(x_1, \dots, x_s)$$

Urmînd o cale analoagă cu cea folosită de Kovalenko [2] se arată că dacă

$$0 < \lim_{u \to \infty} [1 - G(u)] < \frac{sa}{b}$$

atunci există

$$\lim_{n \to \infty} F_n(x_1, \dots, x_s) = F(x_1, \dots, x_s)$$

Putem deci utiliza și aici metoda folosită mai sus în cazul τ = constant pentru a determina caracteristicile sistemului.

În cazul particular

$$P\{\tau < x\} = 1 - e^{-\mu x}$$

obținem

$$f_k = \begin{cases} \dfrac{(ab)^k}{k!} f_0, & \text{pentru } k \leqslant s, \\[2ex] \dfrac{a^k b^s}{s!} \dfrac{f_0}{\prod\limits_{i=s+1}^{\infty} \left[\dfrac{s}{b} + \mu\,(i-s)\right]}, & \text{pentru } k > s \end{cases}$$

unde

$$f_0^{-1} = \frac{b^s}{s!} \sum_{k=s+1}^{\infty} \frac{a^k}{\prod_{i=s+1}^{\infty} \left[\frac{s}{b} + \mu(i-s)\right]} + \sum_{k=1}^{s} \frac{(ab)^k}{k!}$$

Metoda folosită aici pentru studiul sistemului GI/G/s cu restricții asupra timpului de așteptare se poate extinde și pentru cazul cînd timpul de rămînere în sistem este limitat. În acest caz luăm $\xi_1(0) = \alpha_1$, $\xi_2(0) = \alpha_2, \ldots, \xi_s(0) = \alpha_s$ și vectorul $x = (x_1, \ldots, x_n;\ 0 \leqslant x_i \leqslant < \tau;\ i = 1, \ldots, s)$ pentru care $x_{i_j} > 0$ dacă $i \leqslant j \leqslant k$ și $x_i = 0$ dacă $i \neq i_j$, $1 \leqslant i \leqslant s$.

Considerăm un moment fix arbitrar $t > \max \alpha_i (i = 1, \ldots, s)$ și notăm cu T_j momentul în care sosește cerința j cu condiția ca ea să fi sosit ultima înainte de momentul t și să fi intrat în stația i pentru a fi servită ultima. Dacă T_j^* reprezintă timpul necesar pentru servirea acestei cerințe, iar starea sistemului în momentul $t (t > 0)$ este $\xi(t) = x$, atunci luînd $T_j = T_j^* = \delta > 0$, suficient de mic, avem

$$P\{x_i = 0;\ i \neq i_j,\ 1 \leqslant j \leqslant k;\ x_{i_j} \leqslant \xi_{i_j} \leqslant x_{i_j} + \delta\} \leqslant \max(a^k, b^k)\, \delta^k,$$

ceea ce arată că există funcțiile $f_k(i_1, \ldots, i_k;\ x_1, \ldots, x_k)$ astfel ca

$$\lim_{t \to \infty} P\{\xi_{i_j}(t) > a_j;\ 1 \leqslant j \leqslant k;\ \xi_i(t) = 0,\ i \neq i_j;\ 1 \leqslant j \leqslant k\} =$$

$$= \int_{a_1}^{\infty} \cdots \int_{a_k}^{\infty} f_k(i_1, \ldots, i_k;\ x_1, \ldots, x_k)\, dx_1 \ldots dx_k$$

pentru orice $a_j \geqslant 0$, $j = 1, \ldots, k$.

Aceasta ne permite să continuăm raționamentul ca în cazul sistemului GI/G/s cu timp de așteptare limitat.

BIBLIOGRAFIE

1. Barser D. V.: *Queueing with impatient customers and ordered service*, Opns. Res. 5, 5, (1957), p. 650–56.
2. Kovalenko I. N.: *Necotorte zadaci massovovo obslujivaniia s ograniceniem*, Teor. Veroiatn. Primen. VI, 1, (1961), p. 222–228
3. Mihoc Gh., Ciucu G., : *Introducere în teoria așteptării*, Ed. Tehnică București (1967).
4. Shanbhag N. D.: *On a generalized queueing system with Poisson arrivals*, J. Roy. Statist. Soc, B, 28 (1966).
5. Skorohod A. V.: *Granicinte uslovia dlia nekotorth markovskih proțessov*, Teor. Veroiatn. IX, 4, (1966), p. 644–54.

СИСТЕМА ОБСЛУЖИВАНИЯ GI/G/s С ОГРАНИЧЕНИЯМИ НАД ВРЕМЕНЕМ ОЖИДАНИЯ

Краткое содержание

Системы обслуживания M/M/ s; и M/G/s были изучены Баррером (1), Говером и другими авторами. В этой работе дается общий метод изучения систем GI/G/s при гипотезе существования некоторых ограничений над временем ожидания.

Предполагается, что имеется стохастическая система обслуживания G;I/G;/s, имеющся параллельных станций, к которым требования приходят в случайные моменты времени: $0 \leqslant t_1 \leqslant t_2 \leqslant \ldots \leqslant t_n \leqslant \ldots$. Требование, которое поступает в систему и не находит ни одной свободной станции, ждет некоторое время δ, после чего, если не поступает в станцию, — покидает систему. Изучались случаи когда τ является случайной переменной с распределением G. Даются уравнения, описывающие этот процесс, рассчитывается среднее время ожидания и вероятность того, чтобы требования покидали систему без обслуживания.

QUEUING SYSTEM GI/G/s WITH RESTRICTIONS ON THE QUEUING TIME

Abstract

Queuing systems M/M/s and M/G/s have been investigated by Barrer[1], Gaver, etc. A general studying method of the GI/G/s systems in hypothesis of some restrictions on the queuing time is given in this paper.

Queuing stochastic system GI/G/s with s stations in parallel is considered, where the customers arrive in the $0 \leqslant t_1 \leqslant t_2 \leqslant \ldots \leqslant t_n \leqslant \ldots$ random moments. A customer entering the system and finding no free station, waits a τ period of time, after which, if he does not come into the station — he leaves the system. The cases in which $\tau =$ constant and τ is a G distribution stochastic variable have been studied. The equations describing the process are written and the mean queuing time and the probability that the customers leave the system without being served is calculated.

Primită la 15 × 1971

UNIVERSITATEA BUCUREŞTI
FACULTATEA DE CHIMIE

REMARK ON THE PAPER OF HAHN: ON A NEW TYPE OF STABILITY

J. FODOR

I. Introduction

In [1] Hahn is discussing a new type of stability generalizing the L — stability studied by Strauss [2]. Here we shall discuss a more general type of stability, which was introduced in my doctoral dissertation [8].

Finally, I am deeply grateful to Professor A. Halanay for many helpful coments.

II. On the second ordered equation

Firstly we shall prove some simple therems by which the general stability concept was motivated. In the following we give the Liapunov functions in the Barbasin's form [4].

1. We consider the system

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -ay - f(x) \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

where $a > 0$ $f : R \to R$, f is continuous, $f(0) = 0$ and $\int_0^x f(x)\, dx > 0$.

Let be

$$V_1(x,\ y) : = y^2 + 2\int_0^x f(x)\, dx$$

and

$$V_1^*(t) : = V_1(x(t),\ y(t)),$$

where

$(x(t),\ y(t))$, is a solution of the system (1).

It follows that

$$\dot{V}_1^*(t) = -\ 2ay^2(t) \leqslant 0$$

from which we get

$$V_1^*(t) - V_1^*(t_0) = -2a\int_{t_0}^{t} y^2(t)\,\mathrm{d}t.$$

We have therefore that

$$0 \leqslant 2a\int_{t_0}^{t} y^2(t)\,\mathrm{d}t \leqslant V_1^*(t_0),\ (t \geqslant t_0)$$

and finally

$$2a\int_{t_0}^{+\infty} y^2(t)\,\mathrm{d}t \leqslant V_1^*(t_0),$$

so we proved the following theorem:

Theorem 1:

Assume for the equation

$$\ddot{x} + a\dot{x} + f(x) = 0 \tag{2}$$

that

$$a > 0;$$

$$f : R \to R \text{ is continuous with } f(0) = 0;$$

$$\int_0^x f(x)\,dx \geqslant 0.$$

Then for every $\varepsilon > 0$ there exists $\delta > 0$ such that if x is a solution of (2) with

$$D_x = [t_0, +\infty] \text{ such that}$$

$$|x(t_0)|^2 + |\dot{x}(t_0)^2 < \delta \text{ then}$$

$$\int_{t_0}^{+\infty} |\dot{x}(t)|^2\,\mathrm{d}s < \varepsilon,$$

where D_x is the domain of function x.

Remark 1: If $|f(x)| \leqslant \frac{|x|}{2}$ then it is easy to show that δ may be choosen $\delta := 2a\varepsilon$.

Remark 2: If in (2)

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{if } x \leqslant 0 \\ \sin x, & \text{if } 0 < x < \pi \\ 0, & \text{if } x \geqslant \pi \end{cases}$$

then the trivial solution of equation (2) is not asymptotically stable, but conditions of Theorem 1 are satisfied.

$$\text{If} \int_0^x f(x)\,\mathrm{d}x = 0 \text{ implies } x = 0 \text{ and } f(x) \neq 0 \text{ for } x \neq 0$$

then the trivial solution of (2) is asymptotical stable.

Proof: We note that the trivial solution of system (1) is uniformly stable. We see recording to the theorem VIII of Hahn [1] that $\dot{x}(t) \to 0$, but

$$-\dot{x}(t_0) = \int_{t_0}^{+\infty} \ddot{x}(t)\, dt$$

therefore $\liminf |\ddot{x}(t)| = 0$.
Using the ideas of the Hahn's theorem VIII we have $\ddot{x}(t) \to 0$, hence $f(x(t)) \to 0$, and it follows $x(t) \to 0$,
which gives that the trivial solution of (2) is asymptotically stable.

If fe $C^{(n)}$, then it is easily seen that $x^{(n+2)}(t) \to 0$, where $C^{(n)}$ is the space of the functions which have continuous n-th derivative.

2. We consider the system

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= ax + f(y) \\ \dot{y} &+ cx + dy \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

where $f : R \to R$ is continuous, $f(0) = 0$, $a + d < 0$, $ad - c > 0$ and

$$cy \cdot f(y) < cy^2.$$

Let be

$$V_2(x, y) := (cx - ay)^2 + 2\int_0^y (\mathrm{ady} - cf(y))\, dy.$$

It follows

$$\dot{V}_2^*(t) = 2(a + d)[ady^2(t) - cf(y(t)) \cdot y(t)] \leqslant 2(a + d)(ad - c)(y^2(t)) \leqslant 0.$$

so we have

$$V_2^*(t) - V_2^*(t_0) \leq 2(a + d)(ad - c)\int_{t_0}^{t} y^2(t)\, dt$$

hence

$$-2(a + d)(ad - c)\int_{t_0}^{t} y^2(t)\, dt \leqslant V_2^*(t_0), \ (t \geqslant t_0)$$

and

$$0 \leqslant -2(a + d)(ad - c)\int_{t_0}^{+\infty} y^2(t)\, dt \leqslant V_2^*(t_0).$$

So we prove the following theorem:

Theorem 2:

Assume that the system (3) has the following properties
$f : R \to R$is continuous with $f(0) = 0$

$$a + d < 0$$

$$ad - c > 0$$

$$cy \cdot f(y) < c \cdot y^2.$$

Then for every $\varepsilon > 0$ there exists such a $\delta > 0$ that if $z(t) = (x(t), y(t))$ is a solution of (3) with $D_z = [t_0, +\infty]$ such that

$$|x(t_0)| + |y(t_0)| < \delta \text{ then}$$

$$\int_{t_0}^{+\infty} |y(t)|^2 \, dt < \varepsilon.$$

3. We consider the system

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -f(x) - g(y) \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

where $g : R \to R$ is continuous, $g(0) = 0$, $f : R \to R$, f is continuous, $f(0) = 0$, $g(y) \cdot y > c|y|^\alpha$, where, $\alpha > 0$ and $c > 0$, and

$$\int_0^x f(x) \, dx \geqslant 0.$$

Let be

$$V_3(x, y) := y^2 + 2\int_0^x f(x) \, dx.$$

It follows that

$$\dot{V}_3^*(t) = -2g(y(t))y(t) \leqslant -2c|(y(t))|^\alpha \leqslant 0,$$

and so we get -in a similar way se above-the following theorem.

Theorem 3:

Assume that in the equation

$$\ddot{x} + g(\dot{x}) + f(x) = 0 \tag{5}$$

$$f : R \to R \text{ is continuous with } f(0) = 0,$$

$$g : R \to R \text{ is continuous with } g(0) = 0,$$

$$\int_0^x f(x) \, dx \geqslant 0,$$

$$g(y) \cdot y \geqslant c\,|y|^\alpha, \text{ where } c > 0 \text{ and } \alpha > 0.$$

Then for every $\varepsilon > 0$ there exists $\delta > 0$ such that if is a solution of (5), $D_x = [t_0, +\infty)$ and $|x(t_0)| + |\dot{x}(t_0)| < \delta$ then

$$\int_{t_0}^{+\infty} |\dot{x}(t)|^\alpha \, dt < \varepsilon.$$

Remark 3: We can prove in a quite similar way as in the Remark 2| the following assertion: If in theorem 3 $\int_0^x f(x)dx = 0$ implies $x = 0$, and $f(x) \neq 0$ for $x \neq 0$ then the trivial solution of (5) is asymptotically stable, moreover if $f \in C^{(n)}$ and $g \in C^{(n)}$ then

$$x^{(n+2)}(t) \to 0.$$

4. We consider the system

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -f(x) - g(x)\,y \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

where $f : R \to R$ is continuous with $f(0) = 0$, $g : R \to R$ is continuous, $g(x) \geqslant c\,|\,x\,|^{\alpha}$ where $c \geqslant 0$, $\alpha > 0$ and

$$\int_0^x f(x)\,dx \geqslant 0.$$

Let be

$$V_4(x,\ y) := y^2 + 2\int_0^x f(x)\,dx.$$

It follows that

$$\dot{V}_4^*(t) = -\,2g(x\,(t))\,y^2 \leqslant -\,2c\,|x(t)\,|^{\alpha} \cdot y^2(t) \leqslant 0$$

and so we have.

Theorem 4:

Assume in the equation

$$\ddot{x} + g(x)\,\dot{x} + f(x) = 0 \quad (7)$$

$$f : R \to R \text{ is continuous with } f(0) = 0$$

$$g : R \to R \text{ is continuous,}$$

$$\int_0^x f(x)\,dx \geqslant 0$$

$$g(x) \geqslant (c|\,x\,|^{\alpha} \text{ where } c > 0 \text{ and } \alpha > 0.$$

Then for every $\varepsilon > 0$ there exists $\delta > 0$ such that if x is a solution of (7), $D_x = [t_0, +\infty]$ and $|\,x(t_0)\,| + |\,\dot{x}(t_0)\,| < \delta$, then

$$\int_{t_0}^{+\infty} |\,x(t)\,|^{\alpha}/\dot{x}(t)\,|^2\,dt < \varepsilon.$$

5. We consider the system

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= y - \int_0^x g(x)\,dx \\ \dot{y} &= -f(x) \end{aligned}\right\} \quad (8)$$

where $f : R \to R$ is continuous with $f(0) = 0$, $g : \boldsymbol{R} \to R$ is continuous,

$$\int_0^x f(x)\,dx \geqslant 0 \text{ and}$$

$$f(x) \cdot \int_0^x g(x)\,dx \geqslant c\,|\,x\,|^{\alpha} \text{ where } c > 0 \text{ and } \alpha > 0.$$

Let be

$$V_5(x,y) := y^2 + 2\int_0^x f(x)\,dx.$$

It follows that

$$\dot{V}_2^*(t) = -2f(x(t))\cdot \int_0^{x(t)} g(x)\,dx \leqslant -2c\,|x(t)|^\alpha \leqslant 0,$$

and so we have the following theorem:

Theorem 5:

Assume that in the equation (7)

$$g : R \to R \text{ is continuous,}$$

$$f : R \to R \text{ is contiuuous with } f(0) = 0,$$

$$\int_0^x f(x)\,dx \geqslant 0$$

$$f(x)\cdot \int_0^x g(x)\,dx \geqslant c\,|x|^\alpha \text{ where } c > 0 \text{ and } \alpha > 0.$$

Then for every $\varepsilon > 0$ there exists $\delta > 0$ such that if x is a solution of (7), $D_x = [t_0, +\infty)$, and $|x(t_0)| + |\dot{x}(t_0)| < \delta$, then

$$\int_0^{+\infty} |x(t)|^\alpha\,dt < \varepsilon.$$

III. Definitions and notations

Let X be a linear normed space. For fixed $x \in X$ and $t \in [a, +\infty)$ the function $p(\cdot\,; x, t) : R \to X$ is called a motion, if it satisfies the following axioms:

a) $p(t;\ x,\ t) = x$

b) $p[\cdot\,;\ p(t_2,\ x,\ t_1), t_2] = p(\cdot\,;\ x,\ t_1)$.

Let F be a functional with the following properties:

a) $F : (R \to X) \to [0;\ +\infty]$

b) $F(0) = 0$.

For a fixed $t \in R$ let be $\chi_t : R \to R$ the following function

$$\chi_t(s) := \begin{cases} 1 \text{ if } s \geqslant t \\ 0 \text{ if } s < t, \end{cases}$$

and let be

$$G_\Delta := \{x;\ x \in X \text{ and } \|x\| < \Delta\} \text{ for } \Delta > 0.$$

Definition 1: We say, that the motion $p(.;\ x,\ t)$ is F-stable if for every $\varepsilon > 0$ there exists $\delta(\varepsilon,\ t) > 0$ for which $\|x - y\| < \delta(\varepsilon,t)$ implies the inequality

$$F(\chi_t \cdot [p(\cdot\ ;\ x,\ t) - p(\cdot\ ;y,\ t)]) < \varepsilon.$$

If it is possible to find a δ — not depending from t_0 —

$$\delta(t_0,\ \varepsilon) = \delta(\varepsilon)$$

for the set $T \subset R$, then we will say that the motion $p\ (.;x,\ t)$ is uniformly F-stable with respect to T.

Definition 2: The motion $p(.;x,\ t)$ is said to be F-unstable if it is not stable.

Remark 4: If $p\ (.;\ x,\ t)$ is the motion whose F-stabity we are studying (we stress on this occasion that we alvays deal with the F-stability of a certain solution, which we suppose to be known), by the change of motions $q(.;\ x - y,\ t) := p(.;\ x,\ t) - p.(;y,\ t)$ we always can reduce the problem to the study of F-stability of the trivial solution.

In all that follows we shall consider only the problem of the F-stability of the trivial motion $g(.;\ 0,\ t) \equiv 0$.

Remark 4: Let be $F_1 : (R \to R^n) \to [0, +\infty]$ and

$$F_1(\varphi) := \sup_t |\varphi(t)|.$$

Then the F_1-stability, F_1-instability and uniform F_1-stability with respect to T is equivalent to stability, instability and uniformly stability with respect to T in sense of Liapunov.

Remark 5: Let $k : [0, +\infty) \to R$ a continuous function which is strictly monotone-increasing and vanishing at $x = 0$.

$$\text{Let } F_2 : (R \to R^n) \to [0, +\infty] \text{ and}$$

$$F_2(\varphi) := \int_{-\infty}^{+\infty} k(|\varphi|)\, dt.$$

Then the F_2-stability and uniform F_2-stability with respect to $[0, +\infty)$ is equivalent to stability and uniform stability studied by Hahn [1].

IV. THEOREMS ON THE STABILITY

The results of this chapter are adaptations of some known results. (See Halanay [3]).

Thegrem: 6

Assume that there exists a function

$V(t,\ x) : [a, +\infty) \times G_\Delta \to R$ with the following properties:

a) $V(t,\ 0) = 0$ for $\geqslant ta$;

b) $V(t,\ x)$ is continuous at $x = 0$ for every fixed $t \geqslant a$;

c) there exists a continuous function
$k: [0, +\infty) \to R$ which is strictly monotone-increasing and vanishing at zero such that

$$k(F(\chi_t\, p(.;x,t)) \leqslant V(t, x).$$

Then the trivial motion is F-stable.

P r o o f: There exists $\delta(\varepsilon, t) > 0$ for every $\varepsilon > 0$ and $t \geqslant a$ such that

$$V(t, x) < k(\varepsilon) \text{ for } |x| < \delta\ (\varepsilon, t),$$

since

$$k(F(\chi_t\, p(\cdot\ ;\ x, t)) \leqslant V(t, x)$$

we have

$$k(F(\chi_t\, p(\cdot\ ;\ x, t)) \leqslant k(\varepsilon) \text{ for } |x| \leqslant \delta(\varepsilon, t).$$

Since k is monotone-increasing it follows

$$F(\chi_t\ p(\cdot\ ;\ x, t)) < \varepsilon \text{ for } |x| \leqslant \delta(\varepsilon, t).$$

Theorem 7:

Assume that there exists a function

$$V(t, x) : [a, +\infty) \times G_\Delta \to R$$

with the properties:
a) $V(t, 0) \equiv 0$ for $t \geqslant a$;
b) there exists two continuous, strictly monotone-increasing function

$$k : [0, +\infty) \to R \text{ and } h : [0, +\infty) \to R$$

vanishing at zero such that

$$k(F[\chi_t p(\cdot\ ;\ x, t)] \leqslant V(t, x) \leqslant h(|x|).$$

Then the trivial motion is uniformly F-stable.

P r o o f: Let be $\Delta > \varepsilon > 0$ and $\delta := h^{-1}(k(\varepsilon)$. If $|x| < \delta$ then

$$V(t, x) \leqslant h(\delta) = h(h^{-1}(k(\varepsilon)) = k(\varepsilon) \text{ for } t \geqslant a, \text{ but}$$

$$k(F(\chi_t\, p(\cdot\ ;x, t)) \leqslant V(t, x), \text{ so we get}$$

$$k(F(\chi_t p(\cdot\ ;\ x, t)) \leqslant k(\varepsilon) \text{ for } t \geqslant a.$$

Since k is monotone-increasing, is follows:

$$F(\chi_t p(\cdot\ ;\ x, t)) < \varepsilon \text{ for } t \geqslant a.$$

Theorem 8:

If the trivial motion is uniformly F-stable, then there exists a function $V(t, x)$ with the properties of the previous theorem.

P r o o f: If the trivial motion is uniformly F-stable then for every $\varepsilon > 0$ there exists $\delta(\varepsilon) > 0$ such that

$$F(\chi_t\, p(\cdot\,;\, x,\, t)) < \varepsilon \text{ for } |x| < \delta(\varepsilon) \text{ and } t \geqslant a.$$

Lee be: $\Delta_1 := \sup\, \delta(\varepsilon)$, $V(t,\, x) := F(\chi_t p(\cdot\,;\, x, t))$ and $D_V = [a, +\infty) \times G_{\Delta_1}$. We can assume that the $\delta(\varepsilon)$ is continuous, strictly monotone-increasing and vanishing at zero (Massera [6]).

$$\text{Let be } h(r) := \delta^{-1}(r) \text{ and } k(r) := r \text{ for } r \geqslant 0.$$

It is easy to verify the statements of previous theorem for $V(t,\, x)$, k and h.
D e f i n i t i o n 3: Let be $\varphi : R \to X$ and $\psi : R \to X$ such that if $\varphi(s) \neq 0$ then $\varphi(s) = \psi(s)$.
We will say that the functional F is monotone if

$$F(\varphi) \leqslant F(\psi).$$

Theorem 9:

If F monotone then the function

$$V^*(t) := V(t,\, p(t;\, x_0,\, t_0))$$

is monotone-decreasing, where the function $V(t,\, x)$ is defined by the preceding theorem.
P r o o f: Let be $t_1 > t_2$. We have

$$V^*(t_2) = V(t_2,\, p(\, t_2;\, x_0,\, t_0)) = F(\chi_{t_2}[p(.\,;\, p(t_2;\, x_0, t_0),\, t_2)] = F(\chi_{t_2}\, p(.\,;$$

$$x_0,\, t_0)) \geqslant F(\, \chi_{t_1}\, p(\,;\, x_0,\, t_0)) = F(\chi_{t_1} p[.\,;\, p(t_1;\, x_0,\, t_0),\, t_1]) = V(t_1,\, p(t_1;\, x_0,\, t_0)) =$$

$$= V^*(t_1)).$$

D e f i n i t i o n 4: The motion $p(.\,;\, x,\, t)$ is said periodic of period ω, if $p(s + \omega;\, x,\, t + \omega) = p(s;\, x,\, t)$ for every t and s.
D e f i n i t i o n 5: We will say that the functional F is periodic of period ω if

$$F(\chi_{t_1}\, p(. + \omega;\, x,\, t)) = F(\chi_{t_1+\omega}\, p(.\,;\, x,\, t))$$

for $t \geqslant a$, $t_1 \geqslant a$ and $x \in G_\Delta$.
We remark that F_1 and F_2 (defined in Remark 4. and Remark 5.) are periodic of period every ω.

Theorem 10:

If every motion is periodic of period ω, then $V(t,\, x)$ defined by Theorem 8. is periodic of period ω with respect to t.

P r o o f: $V(t + \omega,\, x) = F(\chi_{t+\omega}\, p(.\,;\, x,\, t + \omega)) = F(\chi_t p(. + \omega;\, x, t + \omega)) =$

$$= F(\chi_t p(.\,;\, x,\, t)) = V(t,\, x)$$

C o r o l l a r y: If every motion is periodic with respect to all ω, then C (defined by Theorem 8). is independent of t.

D e f i n i t i o n 6: We will say the functional F is continuous if $V(t, x) := F(\chi_t p(\cdot; x, t))$ is continuous on the set $[a, +\infty) \times \{0\}$.
The following two lemmas are evident:

L e m m a 1: If F continuous then the trivial motion is F-stable.

L e m m a 2: If F is continuous then the trivial motion is uniformly F-stable with respect to the set $T = [c, d] \subset [a, +\infty)$.
C o u n t e r e x a m p l e: Let be

$$V(t, x) := \begin{cases} 0 \text{ if } t \leqslant 0 \\ 1 \text{ if } |x| > t > 0 \\ 0 \text{ if } |x| \leqslant t \end{cases}$$

and

$$F_3(\chi_t p(\cdot; x, t)) := V(t, x).$$

It is easy to verify that the trivial motion is F_3-stable, but not uniformly F_3-stable with respect to $[-1, 1]$.

Theorem 11:

If F is continuous and periodic of period ω and every motion is periodic of period ω then the trivial motion is uniformly F-stable with respect to the set $[a, +\infty)$.
P r o o f: The previous lemma implies the uniform F-stability with respect to the set $[a, a + \omega]$ of the trivial motion. In other words: for every $\varepsilon > 0$ there existst $\delta > 0$ such that if $|x| < \delta$ then

$$F(\chi_t p).; x, t)) < \varepsilon \text{ for } t \in [a, a + \omega].$$

Let be $t_1 \in [a, +\infty)$ and $\omega k \leqslant t_1 < \omega(k + 1)$, where k is an integer. We have

$$F(\chi_{t_1} p(\cdot; x, t_1)) = F(\chi_{t_1} p(\cdot - k\omega; x, t_1 - k\omega)) = F(\chi_{t_1 - k\omega} p(\cdot;$$

$$x, t_1 - k\omega)) < \varepsilon \text{ for } |x| < \delta.$$

The following theorem is a trivial consequence of the previous theorems.

Theorem 12:

If every motion is periodic with respect to all ω, F is periodic of any periodic and the trivial motion is F-stable, then the trivial motion is uniformly F-stable with respect to $[a, +\infty)$.

Finally we will prove a theorem on the F-instability.

Theorem 13:

Assume tha there exists a function
$V(t, x): [a, +\infty) \times G_\Delta$ with the following properties:
a) for every $\delta > 0$ and $t_0 > 0$ there exists x_0 with $|x_0| < \delta$ such that $V(t_0, x_0) < 0$;

b) there exists b: $[0, +\infty) \to R$ being continuous strictly monotone-increasing such that $|V(t, p)t; x_0, t_0))| < b(F(\chi_t\, p(.; x_0, t_0))$;

c) there exists k: $[0, +\infty) \to R$ being continuous strictly monotone-increasing and vanishing at zero such that

$$\limsup_{h \to +0} \frac{V(t+h, p(t+h; x_0\, t_0)) - V(t, p(t; x_0, t_0))}{h} \leqslant$$
$$\leqslant -k(F(\varkappa_t\, p(.; x_0, t_0)))$$

Then the trivial motion is F-unstable.

P r o o f: Assume that the trivial motion is F-stable. Then for every $\varepsilon > 0$ and $t_0 > 0$ there exists $\delta(\varepsilon, t_0)$ so, that $|x_0| < \delta$ implies the inequality

$$F(\chi_{t_0}\, p(.; x_0, t_0)) < \varepsilon;$$

choosing x_0 such that $|x_0| < \delta$ and $V(t_0, x_0) < 0$ then we have $|V(t, p(t; x_0, t_0))| \leqslant b(F(\chi_{t_0}\, p(.; x_0, t_0)) \leqslant b(\varepsilon)$ (9)

From c) follows that the function $V(t, p)t; x_0, t_0))$ is monotone decreasing, hence

$$V(t, p(t; x_0, t_0)) \leqslant V(t_0, x_0) < 0 \text{ for } t \geqslant t_0.$$

We have

$$b^{-1}(|V(t_0, x_0)|) \leqslant F(\chi_t\, p(.; x_0, t_0)) \quad (10)$$

From c) it follows

$$V(t, p(t; x_0, t_0)) \leqslant V(t_0, x_0) - \int_{t_0}^{t} k(F\chi_t\, p(.; x_0, t_0))\, dt \text{ for } t \geqslant t_0.$$

The inequality implies

$V(t, p(t; x_0, t_0)) \leqslant V(t_0, x_0) - (t - t_0)\; k(b^{-1}(|V(t_0, x_0,)|))$ for $t \geqslant t_0$, sowe have

$$\lim_{t \to +\infty} V(t, p(t; x_0, t)) = -\infty$$

which contradicts to the inequality (9).

V. ON ASYMPTOTIC STABILITY

D e f i n i t i o n 7: The trivial motion is said asymtotically stable if has the following two properties:

a) stable

b) there exists Δ such that if $x \in G_\Delta$ then

$$\lim_{s \to \infty} F(\chi_s\, p(.; x, t)) = 0$$

for $t \geqslant a$.

Theorem 14:

Assume that there exists a function $V(t, x) : [a, +\infty) \times G_\Delta \to R$ with the following properties:

a) $V(t, 0) \equiv 0$ for $t \geqslant a$;

b) there exists a continuous function $k : [0, +\infty) \to R$ which is strictly monotoneincreasing and vanishing at zero such that $V(t, p(t; x_0, t_0)) \geqslant \geqslant k(F(\chi_t\, p(.; x_0, t_0))$ for $t \geqslant t_0 \geqslant$ a and $x_0 \in G_\Delta$;

c) there exists a continuous function $h : [0, +\infty) \to R$ which is strictly monotoneincreasing and vanishing at zero such that

$$\limsup_{h \to +0} \frac{V(t+h, p(t+h; x_0, t_0)) - V(t, p(t; x_0, t_0))}{h} \leqslant$$

$$\leqslant -cV(t, p(t; x_0, t_0)) \text{ for } t \geqslant t_0 \geqslant a, \text{ and } x_0 \in G_\Delta.$$

Then the trivial motion is asymptotically stable.

P r o o f: It is trivial, that the trivial motion is stable. By hypothesis $c(, V(t, p)t; x_0, t_0))$ is monotone-decreasing.
Let be

$$V_0 := \lim_{t \to +\infty} V(t, p(t; x_0, t_0)).$$

If $V_0 \neq 0$, we obtain

$$-c[V(t, p(t; x_0, t_0))] < -c\,(V_0)$$

and the unequality

$$\limsup_{h \to +0} \frac{V(t+h, p(t+h; x_0, t_0)) - V(t, p(t; x_0, t))}{h} \leqslant -c(V_0) \quad \text{holds.}$$

Integrating we have

$$V(t, pt(; x_0, t_0)) - V(t_0, x_0) \leqslant -c(V_0)|t - t_0|.$$

Then it follows that

$$V(t, pt(; x_0, t_0)) \to -\infty, \text{ which contradicts with hypothesis b).}$$

Hence $V_0 = 0$; from $V(t, p(t; x_0, t_0)) \to 0$ it follows that

$$k\,(F(\chi_t\, p(; x_0, t_0))) \to 0$$

and that

$$\lim F(\chi_t\, p(.; x_0, t_0)) = 0.$$

This proves the theorem.

It is possible to get some general results for the following cases:

a) L^p-stability of Strauss [2];

b) asymptotic stability [3];

c) results of Morozan for the stability of system with random parameters [5];

and I think in very many other cases.

[1] W. Hahn: *On a new Type of Stability.* J. of Differential Equations 3/1967/440—448.
[2] A. Strauss: *Liapunov functions and Lp-solutions of differential equations.* Trans. Am. Mech. soc. 119/1965/37—50.
[3] A. Halanay: *Different al euation.* Academic Press 1966
[4] Barbasin: *O postroenii functii Liapunova.* Differentialnie uravnenia Tom. 4. 2127—2158 No. 12 1968
[5] T. Morozan: *Stabilitatea sistemelor cu parametri aleatori,* Bucureşti 1969
[6] J. L. Massera: *Contribution to stability theory.* Ann. of Math. 65. No 1 182 — 206 p. p (July 1956)
[7] J. Fodor: *On a type of stability,* 3. Internationales Kolloquium über Functionalgleichungen und ihren Anwendungen. Miskolc, 1970.
[8] J. Fodor: *Doctoral Dissertation,* Eötvös Univ. Budapest, 1971.

RECEIVED ON 1 VI 1971

EÖTVÖS LÓRÁND UNIVERSITY
BUDAPEST

DER COMPUTER ALS DIAGNOSTIKHILFE DARGESTELLT AM PROBLEM DER SCHILDDRÜSENDIAGNOSTIK[1)]

P. IHM

Liogik und Mathematik ale Voraussetzung der Computeranwendung in der Diagnostik

Schon vor Beginn der Computerverbreitung gab es Ansätze, differentialdiagnostische Probleme „automatisch", d. h. mit rechnerischen Hilfsmitteln au lösen. Einen ersten bekannten Ansatz mache R. A. Fisher, der Begründer der modernen biologisch-medizinischen Statistik, mit seiner im Jahre 1936 veröffentlichten *Diskriminanzanalyse.* Allerdings handelte es sich bei den Anwendungen um botanische Probleme, d. h. der Pflanzenbestimmung, jedoch war das Problem leicht auf die Medizin zu übertragen, wo es bei einer einfachen Differentialdiagnose darum geht, bei einem Patienten aufgrund der bei ihm festgestellten Symptome zwischen zwei Diagnosen zu entscheiden, ein Problem, das sich auch auf mehrere Diagnosen verallgemeinern lässt. Wenn es sich dabei zunächst auch nur um anthropologische Probleme gehandelt hat, so haben z. B. schon 1949 Rao und Slater eine Diskriminanzanalyse zur Entscheidung zwischen drei Neurosetypen aufgrund psychiatrischer Merkmale durchgeführt. Spätere bekannte Beispiele kamen dann aus der Humangenetik im Zusammenhang mit dem Problem der Vaterschaftserkennung (Baitsch u. Mitarb., vgl. Baitsch 1961). Eigene Untersuchungen (Ihm 19655) führten zu einer optimalen Diskriminanzfunktion zur Trennung von Hepatitis und Verschlussikterus aufgrund von Eisen und Kupfer im Blutserum. Heute liegt eine nicht übersehbare Flut von Publikationen äber die Anwendung dieser Methode auf den verschiedensten Gebieten vor.

Eine andere Entwicklung beruht auf dem 1763 posthum veröffentlichten Theorem von Thomas Bayes (1702—1761), wo sich die Anwendung auch zunächst auf Vaterschaftsprobleme beschränkte (Essen-Möller 1938, vgl. Hummel 1961); die anfänglichen Arbeiten fanden 1971 ihren Niederschlag in dem ausführlichen Tabellenwerk von Hummel und Ihm, das bis heute in ergänzter Form von den meisten Gutachtern verwendet wird. Mittels des Bayesschen Theorems kann die Wahrscheinlichkeit von Hypothesen berechnet werden, beim Vaterschaftsproblem beispielsweise, dass der von der Kindesmutter angegebene Mann der Erzeuger ihres Kindes ist oder nicht.

[1)] Vortrag, gehalten auf der 3. Diagnostik-Woche, München, 5. — 9. Mai 1971

Wesentlich bei den angeführten Entwicklungen ist, dass sie zu einer Zeit begannen, in denen Computer noch gar nicht zur Verfügung standen. In der Tat handelte es sich nur um logische und mathematische Ansätze, mit deren Hilfe das Diagnostikproblem aufgrund allgemeiner theoretischer Annahmen zu lösen war, ohne dass von den meisten Autoren an eine praktische Lösung in grossem Umfafng gedacht werden konnte. War das Problem nämlich einfach, d. h. standen nur wenige Merkmale bzw. Symptome zur Verfügung, war ein Rückgriff auf rechnerische Verfahren meist überflüssig, war die Zahl der Merkmale hingegen gross, liessen sie sich wegen des grossen Rechenaufwandes mit konventionellen Hilfsmitteln kaum bewältigen. Eine Änderung wurde erst mit der Verbreitung leistungsfähiger Computer möglich. Sein Einsatz wäre aber ohne eine mathematische Problemanalyse nicht möglich, und man sollte daher statt von Computerdiagnostik von *numerischer Diagnostik* sprechen.

Der Einsatzbereich der numerischen Diagnostik

Während sich Computer im klinischen Labor bei der Biosignalverarbeitung (EEG, EKG usw.) und in der Kliniksdokumentation einen festen Platz erobert haben, stehen bei der numerischen Diagnostik spektakuläre Ergebnisse noch aus. Zwar ist die Analyse eines EEGs oder die statistische Zusammenstellung aller Fälle mit gleichgelagerter Symptomatik im Einzelfall auch eine Diagnosehilfe, von numerischer Diagnostik im engeren Sinne sollte man aber nur dann sprechen, wenn es sich um Verfahren handelt, die die ärztliche Entscheidung reproduzieren können. Wenn diesses Problem im Prinzip auch theoretisch lösbar ist, steht man doch vor einer Reihe praktischer Schwierigkeiten. So lassen sich z. B. grosse am Patienten gewonnene Datenmengen nur schwer in maschinenlesbarer Form festhalten, und es fehlt an leistungsfähigen Computern, um die Daten so schnell zu bearbeiten, dass die gewonnene Erkenntnisse noch rechtzeitig für den Patienten genutzt werden können. Daher hat man hauptsächlich bei standardisierten Routineuntersuchungen Erfolge erzielt, wo stets die gleichen Daten erhoben werden, deren Umfang den Computereinsatz lohnt und bis zur zentralen Auswertung eine gewisse Zeit verstreichen darf. In der Regel ist dies bei grossangelegten Vorsorgeuntersuchungen der Fall. Wollte man mehr erreichen und etwa die Verfahren in der täglichen Praxis einsetzen, stünden für die Vielfalt der Erkrankungen auch gar nicht die notwendigen Verfahren im einzelnen zur Verfügung. So wird man damit rechnen müssen, dass die numerische Behandlung diagnostischer Probleme vorläufig nur in ganz spezifischen Fällen erfolgreich sein wird.

Die Bestimmung von PBI und T_3 bei Schilddrüsenerkrankungen

Ein Routinefall, bei dem sich der Einsatz eines Computers lohtn, ist die Bestimmung von proteingebundenem Jod (PBI) und Triodtyronin (T_3) im Bereich der Schilddrüsendiagnostik. In der Klinik und Poliklinik

für Nuklearmedizin in Marburg (Direktor: Professor Dr. Dr. E. H. Graul-fallen pro Tag etwa zwanzig derartige Bestimmungen an, zu denen ausjanderen Kliniken oder von niedergelassenen Arzten Seren von Patienten ein) gesandt werden, die die das Analysenergebnis beurteilenden Arzte der Poliklinik nicht zu Gesicht bekommen. Auf einem begleitenden Fragebogen wird nach einigen klinischen Merkmalen gefragt, die die Beurteilung des Befundes erleichtern sollen. Hierbei handelt es sich im wesentlichen um

1. Gewichtsveränderung in den letzten zwei Monaten
2. Fingertremor
3. Ruhepuls (Schläge pro Minute)
4. Blutdruck, systolisch
5. Blutdruck, diastolisch
6. Exophthalmus
7. Hitzeempfindlichkeit

Die Blutdruckwerte werden zur späteren Berechnung standardisiert, um die Alters- und Geschlechtsabhängigkeit zu eliminieren, die anderen Merkmale werden mit Ausnahme des Ruhepulses durch 0 und 1 codiert, Gewichtsabnahme zudem noch durch-i 1. Hinzukommen dann als 8. und 9. Merkmal noch T_3 (Prozent Jonenaustauscherabsorption) und PBI (Mikrogramm/100ml. Serum). Die Beurteilung ist auf einer 6-Kategorienskala möglich, nämlich:

1. sicher euthyreot
2. deutliche vegetative Symptomatik mit euthyreoter Tendenz
3. stark vegetativ stigmatisiert
4. eher hyperthyreot als euthyreot
5. stark hyperthyreot
6. z sehr stark hyperthyreot

Die in der erwähnten Studie (Ihm, Kuni, Christiansen, Joseph u. Graul) zu beurteilenden Fälle bestanden aus euthyreoten vegetativen Dystonien, Hyperthyreosen sowie kompensierten und dekompensierten autonomen Adenomen. Dabei stellte sich heraus, dass mit Hilfe der angeführten Daten nicht zwischen diesen vier Diagnosen zu entscheiden war, sondern lediglich zwischen euthyreoten und hyperthyreoten Patienten, d. h. zwischen zwei Schilddrüsenfunktionstypen, nicht aber zwischen den Ursachen. Die kompensierten autonomen Adenome werden durch das Verfahren somit der euthyreoten Gruppe, die dekompensierten der hyperthyreoten zugeteilt. Diese beiden so definierten Gruppen sollen daher zur Vermeidung von Missverständnissen mit Eu und Hy bezeichnet werden. T_3-Test und PBI-Bestimmung, zusammen mit der Bewertung der sieben klinischen Merkmale, können somit auch nur zu einer Vorentscheidung führen, die darin besteht, bei einem Teil der Patienten nuklearmedizinische Untersuchungen anzuschliessen. In der Tat wird in der Praxis bei allen Patienten, die nicht „sicher euthyreot" sind (Kategorie 1), die Durchführung von Radiojodtest und Szintigraphie empfohlen. Kommt der Arzt zum Urteil „sicher euthyreot", liegt aber ein Tastbefund vor, wird die Anfertigung eines Szintigrammes empfohlen.

Wegen der Vielzahl der Fälle und der Vollständigkeit der Angaben kam eine routinemässige Berechnung mit dem Computer in Frage. Hierzu mussten:

— ein passendes mathematisches Verfahren gefunden und

— dessen Ergebnisse mit dem Urteil des Arztes verglichen werden.

Methoden und Ergebnisse wurden ausführlich in einer anderen Arbeit beschrieben (Ihm et al.). Anhand der gewonnenen Ergebnisse sollen exemplarisch Probleme und Verfahren der numerischen Diagnostik behandelt werden.

Die mathematischen Ansätze

a) *Das Bayessche Theorem.* Wie bereits, erwähnt, wurde das Bayessche Theorem bereits 1938 in die Vaterschaftsbegutachtung eingeführt. Seine Bedeutung kann man sich an folgendem Beispiel veranschaulichen: In einem Versuch wird einem Beobachter in zufälliger Reihenfolge und ohne Bevorzugung der einen oder anderen eine von zwei äusserlich nicht unterscheidbaren Urnen angeboten, von denen die Urne A 99 schwarze und eine weisse, die Urne B dagegen eine schwarze und 99 weisse Kugeln enthält. Die Versuchsperson darf der Urne eine Kugel enthnehmen. Its es eine schwarze, wird sie es für wahrscheinlicher halten, dass die Urne A angeboten wurde. Wüsste die Versuchsperson hingegen, dass Urne A nur sehr selten angeboten wird, etwa einmal unter 1000, würde sie es dennoch für wahrscheinlicher halten, dass Urne B angeboten wurde. Beim Bayesschen Theorem schliesst man also mit Wahrscheinlichkeit auf ein vorausgegangenes Ereignis, nachdem man ein bestimmtes Versuchsergebnis erhalten hat — es handelt sich um eine *Rückschlusswahrscheinlichkeit.*

Übertragen wir den Fall auf das Problem der Schilddrüsndiagnostik, können wir bei den zwei Funktionstypen Eu und Hy feststellen, mit welcher Frequenz Eu bzw. Hy unter allen Fällen vorkommen. In dem von uns analysierten Material fanden sich Ü Eu- auf 3 Hy-Fälle, was einer Hy-Frequenz von 30% entspricht. Das zufällige Auftreten von Eu- und Hy-Patienten entspricht dem zufälligen Anbieten der Urnen. Aus Zahlen von Börner und Mitarb. (1968 a) geht hervor, dass bei Eu („normaler Schilddrüsenfunktion") in 4% der Fällen ein Exophthalmus vorhanden war, bei Hy dagegen in 46% der Fälle. Diese Prozentzahlen würden durch die Frequenzen der schwarzen unter 100 Kugeln in den Urnen repräsentiert. Stellt man bei einem Patienten, der entweder zur Gruppe Eu oder Hy gehört, einen Exophthalmus fest, wird man ihn eher zu Hy einteilen, weil Exophthalmus bei Eu selten ist. Diese intensive Bewertung lässt sich nun durch eine nach dem Bayesschen Theorem berechnete Wahrscheinlichkeit belegen. Die beobachteten Häufigkeiten sind:

Exophthamus Räufigkeit in %)

	+	—	Summe
Eu	4	96	100
Hy	46	54	100

Trägt man nun dem Umstand Rechnung, dass 70% der Fälle zu Eu gehören und überträgt die Zahlen auf zusammen 30% Eu- und 70% Hy-Fälle, ergibt sich folgendes Bild:

Exophthalmus (Häufigkeit in %)

	+	–	Summe
Eu	2.8	67.2	70.0
Hy	13.8	16.2	30.0
Summe	16.6	83.4	100.0

Dabei verhalten sich z. B. die Zahlen 2.8 und 67.2 für Exophthalmus + und – bei Eu wie 4 zu 96. Aus obiger Tabelle geht weiter hervor, dass insgesamt 16.6% der Patienten einen Exophthalmus aufweisen, 83.4% nicht. Unter ersteren gehören 2.8% zu Eu, 13.8% zu Eu, 13.8% zu Hy. Diese Zahlen drückt man nun wieder in Prozenten bezüglich ihrer Summe 16.5% aus und erhält damit die Wahrscheinlichkeiten von Eu und Hy bei beobachteten Exophthalmus. Allgemein ergibt sich dann:

Exophthalmus	Eu	Hy	Summe
+	16.9	83.1	100.0
–	79.6	20.4	100.0

Somit ist die Wahrscheinlichkeit von Hy bei beobachtetem Exophthalmus mit 83.1% deutlich grösser als die von Eu. Ebenso weist fehlender Exophthalmus auf Eu hin.

Man erkennt an dem Beispiel, dass die *Wahrscheinlichkeit einer Diagnose* bei Vorliegen eines bestimmten Symptoms als deren Anteil unter allen Fällen, die das Symptom aufweisen, definiert wird. Vorliegen oder Fehlen eines Exophthalmus liefert zwar schon deutliche Hinweise, das Verfahren wird aber erst sinnvoll, wenn vielle Merkmale herangezogen werden. Dies wurde zuerst von Overall und Williams (1963), Ledley und Lusted (1959), Boyle und Mitarbeitern (1966) und anderen unternommen. Auch Ihm et al. verwendeten bei den vorliegenden Merkmalen das Bayessche Theorem. Alle untersuchten Hyperthyreosen erwiesen sich dabei eindeutig ales Hy. Interessant waren drei Fälle von autonomen Adenom. Berechnete man die Wahrscheinlichkeiten nur aufgrund der sieben klinischen Merkmale, ergaben sich Wahrscheinlichkeiten von 37, 67 und 100% für Hy, nach Einbeziehung von T_3 und PBI jedoch von jeweils 100%. Es ist ja schon darauf hingewiesen worden, dass das angeführte Untersuchungsschema nur zwischen euthyreoter (Eu) und hyperthyreoter (Hy) Funktion zu unterscheiden erlaubt, nicht aber Aufschlüsse über die Ursachen gibt, so das sdekompensierte autonome Adenome, die sich ja hyperthyreot verhalten, als Hy eingestuft werden.

Gegen des Bayessche Theorem ist schon sehr früh Kritik laut geworden. Wie das Beispiel gezeigt hat, geht die Morbidität in die Formel ein, wodurch seltene Krankheiten a priori benachteiligt werden. Man wird aber verlangen müssen, dass bei jeder Krankheit der gleiche Anspruch besteht, dass sie als das erkannt wird, was sie ist. Wer z. B. eine Krankheit, die einmal unter tausend vorkommt, grundsätzlich nicht diagnostizierte, hätte eine geringe Fehlerquote aufzuweisen, für die an dieser Krankheit leidenden könnte dieser Irrtum aber verheerend sein. Wie wir später sehen werden, spielen Wahrscheinlichkeitebetrachtungen *allein* tatsächlich keine wesentliche Rolle. Man kann sie nur im Zusammenhang mit Risikoüberlegungen und den daraus folgenden Entscheidungen sehen. Es wäre zwar möglich, bei der Anwendung der Bayesschen Formel so zu tun, als seien alle Diagnosen a priori gleichwahrscheinlich, man erhielte dann aber keine echten Wahrscheinlichkeiten mehr und müsste sich nach anderen Kriterien umsehen. Dieses Vorgehen führt dann aber zur statistischen Entscheidungstheorie.

Ein anderer Punkt der Kritik am Bayesschen Theorem ist, dass die meisten Anwender, jedenfalls auf dem Gebiet der Schilddrüsenerkrankungen, so tun, als seien alle Merkmale unabhängig. Es ist sogar manchmall behauptet worden, als sei diese Annahme für das Bayessche Theorem wesentlich. Dies ist zwar nicht der Fall, praktisch ist es aber sehr schwer, bei den Berechnungen ohne diese Annahme auszukommen. Da diese Unabhängigkeit bei vielen der verwendeten Symptome nicht vorliegt, sind die berechneten Wahrscheinlichkeiten im Prinzip falsch, und es ist noch nicht gelungen auszurechnen, mit welcher Fehlerbreite zu rechnen ist. In der Arbeit von Ihm et al. wurde der Abhängigkeit, wenigstens approximativ, Rechnung getragen.

b) *Die Diskriminanzanalyse.* Bei diesem Verfahren handelt es sich im wesentlichen darum, die Symptome zu einem oder mehreren Indizes (Diskriminanzfunktionen) zusammenzufassen, die eine optimale Trennung der einzelnen Gruppen erlauben. Bei zwei Gruppen wie in unserem Beispiel genügt ein Index. Die Indizes sind im einfachsten Falle gewogene Mittel der beobachteten Merkmalsgrössen, wobei die Gewichte so zu bestimmen sind, dass die Wahrscheinlichkeit einer Fehlklassifizierung zu einem Minimum wird. Ansätze stammen von R. A. Fisher oder lassen sich aus der Theorie der statistischen Tests von E. S. Pearson und J. Neyman ableiten. Für die Schilddrüsendiagnostik werden von verschiedenen Autoren Indizes, d. h. Diskriminanzfunktionen, angegeben, die, wenn auch brauchbar, im Sinne der statistischen Theorie nicht optimal sind. So hat Wayne 1965 aus zirka 20 klinischen Merkmalen einen Index berechnet, bei dem er die Gewichte intuitiv bestimmte; er kam bei der Entscheidung zwischen Eu und Hy zu einer lerquote vom 3%.Ein anderes Verfahren stammt von Börner und Mitarbeitern (1968). Diese verwendeten folgende Merkmale:

1. Blutdruckamplitude mindestens 60 mm Hg
2. Pulsfrequenz mindestens 100 Schläge pro Minute
3. Systolisches Herzgeräusch
4. Fingertremor
5. Warme Hände
6. Exophthalmus

Jedem der Symptome wurde 1 oder 0 zugeordnet, je nachdem ob es aufgetreten war oder fehlte. Die Summe dieser Zahlen, d. h. die Zahl der aufgetretenen Merkmale, lieferte die Diskriminanzfunktion zur Entscheidung zwischen Eu und Hy. Die Verteilung der Punktzahl bei Eu und Hy ist in

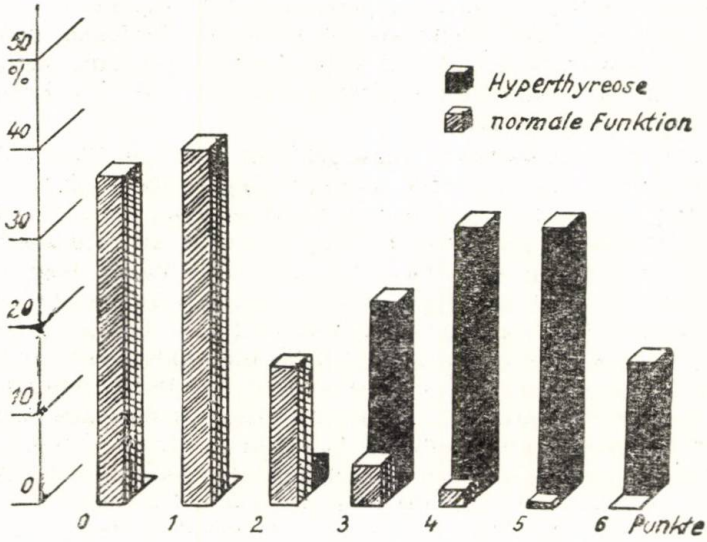


Abb. I. Relative Punkteverteilung bei 92 Patienten mit Hyperthyreose und 416 Patienten mit normaler Schilddrüsenfunktion (jede Funktionsgruppe = 100%) (Aus Börner et al., 1968)

Abb. 1 dargestellt. Börner et al. schlagen vor, bei allen Patienetn, die wenigstens drei Punkte haben oder einen Tastbefund aufweisen, ein Szintigramm anzufertigen. Dadurch entgehen ihnen einige Fälle aus der Hy-Gruppe, die zwei Punkte haben, und es wird eine gewisse Anzahl von Eu-Patienten, die drei oder mehr Punkte haben, unnötig szintigraphiert, ein Risiko, das von den Autoren offenbar geringer eingeschätzt wird als das, Hy-Fälle zu übersehen.

Die Aufgabe der Diskriminanznzanalyse Fishers bestünde bei Börners Fall nun einfach darin, nach dem Prinzip der Fehlerminimisierung auf rechnerischem Wege Gewichte für die einzelnen Merkmale zu suchen, was natürlich nicht ausschliesst, dass sich tatsächlich die von Börner verwendeten Gewichte i ergeben kännen. Allerdings müsste man hierzu auf die Originaldaten zurückgreifen, so dass ufrund der von Börner veröffentlichten Daten die Gewichte nicht bestimmt werden können. Ihm et al. führten die Rechnung jedoch bei den ihnen vorliegenden neun Merkmalen durch und erhielten eine Diskriminanzfunktion, deren Verteilung bei Eu und Hy in Abb. 2a wiedergegebe ist.

Wie man sieht, liegt wie bei Börner et al. ein gewisse Uberschneidung der Verteilungen vor, jedoch variieren die Eu-Fälle nicht wie dort über den gesamten Hy-Bereich. Eine Faktorenanalyse hat ergeben, dass die verwendete Diskriminanzfunktion den Grad der Hyperthyreoidie misst und den Hauptanteil der Information über die neun Merkmale enthält. So wurde zunächst ein Hyperthyreoidie-Index gewonnen, der diagnostisch weiterverarbeitet werden kann. Dabei bleibt aber das Problem bestehen, nach welchne Kriterien man entscheiden soll, bei welchen Patienten eine weiterführendz nuklearmedizinische Diagnostik empfohlen werden soll. Die Lösung hierue liefert die Entscheidungstheorie.

c) *Die Entscheidungstheorie.* Diese geht auf Abraham Wald (1902—1950) zurück und liefert Kriterien dafür, wie man angesichts des Zufalls Entscheidungen treffen soll. Beim vorliegenden Problem kann man zwei Fehler begehen: 1. Eu fälschlich als Hy und 2. Hy fälschlich als Eu zus bezeichnen und entsprechend falsch zu behandeln. In beiden Fällen liegt ein *Verluts* vor: 1. ein Patient wird unnötig nuklearmedizinisch untersucht oder 2. eine an sich indizierte derartige Untersuchung wird unterlassen. Setzte man in Abb. 2a die Grenze, vou der an man sich für die nuklearmedizinische Untersuchung entschliesst, etwa beim Wert von -2 des Indes, würden mehr als 50% der Eu-Fälle unnötig szintigraphiert, dagegen entginge kein Hy-Fall der weiterführenden nuklearmedizinischen Untersuchung. Nimmt man einmal beispielhaft als Verlust den Prozentsatz der unnötig szintigraphierten Eu-Fälle an, so erhält man die ausgezogene Kurve I im Abb. 2b, wobei auf der Abszisse jeweils der Wert abzulesen ist, bei dem dem entsprechenden Verlust die zugehörige Entscheidungsgrenze angegeben ist. In gleicher Weise soll für die Ha-Gruppe als Verlust der Prozentsatz der nicht szintigraphierten Fälle angenommen werden. Dies führt zur Kurve II. Ein Entscheidungskriterium lässt sich nun aus dem sogenannten *Minimax-Prinzip* ableiten. Danach wird die Grenze so gesetzt, dass der maximale Verlust minimisiert wird. In Abb. 2b gibt die eingezeichnete gestrichelte Kurve den maximalen Verlust wieder. Sie hat ihr Minimum an der durch den Pfeil bezeichneten Stelle. Von diesem Wert an würde man dann also die Durchführung einer weiterführenden nuklearmedizinischen Untersuchung empfehlen.

Nun entspricht die als Beispiel verwendete Verlustfunktion sicher nicht der Realität, indem etwa die eine Fehlentscheidung weniger schwerwiegend sein kann als die entgegengesetzte. Es ist aber sehr schwer, den tatsächliche Verlust in Zahlen auszudrücken, so dass die Entscheidungsgrenze nicht os ohne weiteres durch mathematische Verfahren festgesetzt werden kann. Ein Ausweg ist, durch die Beobachtung des ärztlichen Verhaltens gegeben. So kann man die einzelnen Fälle ärztlich beurteilen lassen und gleichzeitig die Diskriminanzfunktion ausrechnen. Als Grenze zwischen den Kategorien „sicher euthyreot", „deutliche vegetative Symptomatik ..." usw. wird per definitionem der Punkt angesehen, bei dem 50% der Beurteiler sich für die untere, 50% für die obere Kategorie entscheiden. Hierzu braucht man relativ grosse Fallzahlen. Man kann sich auch des Regressionsansatzes bedienen, die Kategorien etwa mit 1, 2, ... 6 quantifizieren und für jeden Wert der Diskrimi-

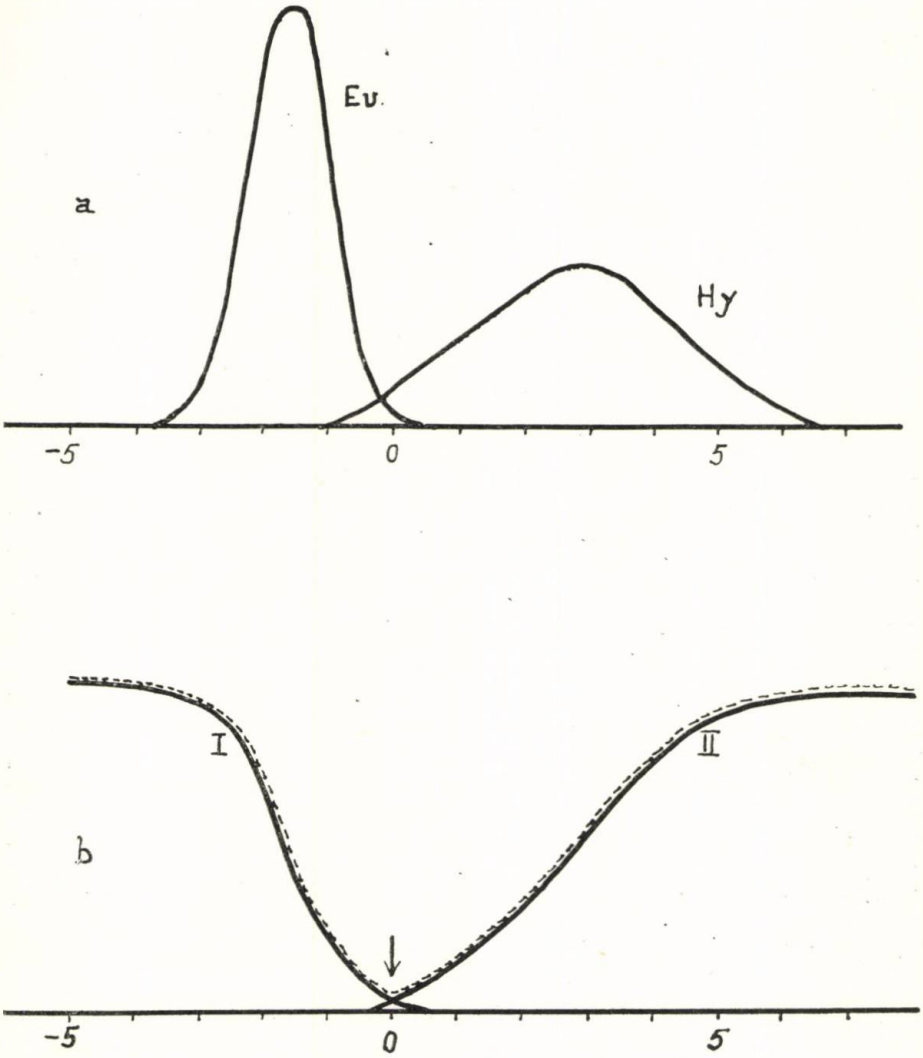


Abb. 2a und 2b

Abb. 2a und 2b

nanzfunktion die Kategorie mittels der Methode der kleinsten Quadrate bestimmen. Dies führt im vorliegenden Beispiel zu einer Grenzziehung zwischen den beiden ersten Kategorien bei etwas unter −1. Das bedeutet, dass der erfahrene Arzt hier die Grenze so setzt, dass praktische bei allen Hy-Fällne eine weiterführende nuklearmedizinische Untersuchung empfohlen wird. Daraus kann man indirekt schliessen, wie die Verluste im Verhältnis zueinander intuitiv beurteilt werden. Wie man hier im einzelnen optimal vorgehen soll, insbesondere in komplizierter gelagerten Fällen, wird Gegenstand künftiger Forschungsarbeiten sein. Heute kann man aber schon sagen, dass Ansätze, die sich mit Wahrscheinlichkeitsangaben begnügen, ausser in Einzelfällen den Anforderungen bei der numerischen Diagnostik nicht entsprechen, weil letztendlich Entscheidungsregeln verlangt werden, sei es für die Weiterführung der Untersuchung, sei es für die Therapie. Diese beruhen zwar auf wahrscheinlichkeitstheoretischen Ansätzen, für den Benutzer tritt dabei die Wahrscheinlichkeit aber nicht unmittelbar in Erscheinung.

LITERATUR

Baitsch, H.: *Mathematisch-statistische Verfahren im anthropologisch-erbbiologischen Gutachten.* In: Die medizinische Vaterschaftsbegutachtung, hrsg. v. K. Hummel, Stuttgart 1961: 53–82

Börner, W., M. Lautsch, E. Moll u. E. Rauh: *Ein einfaches Punktsystem zur Verbesserung er klinischen Hyperthyreosediagnostik.* Medizinische Welt 1968: *19* 2463–2468

Börner, W., M. Lautsch, E. Moll u E. Rauh: *Verbesserung der klinischen Hyperthreosediagnostik mit Hilfe eines einfachen Punktsystems.* Deutsche Med. Wschr 1968: *93*: 2173–2174

Boyle, J. A., W. R. Greig, D. A. Franklin R. M. Harden, W. W. Buchanan u. E. M. McGirr: *Construction of a model for computerassisted diagnosis: application to the problem of non-toxic goitre.* Quart. J. Med. 1966: *35*: 565–588

Fisher, R. A.: *The use of multiple measurements in taxonomic problems.* Ann. Eugenics 1936: *7*: 179

Ihm, P.: *Die Kontrolle der Irrtumswahrscheinlichkeit bei klinischen Untersuchungen.* Arzneim Forsch. 1955: *5*: 662–664.

Ihm, P., H. Kuni, V. Christiansen, K. Joseph u. E. H. Graul: *Elektronische Datenverarbeitung in der medizinischen Diagnostik am Beispiel der Hyperthyreose* (in Vorbereitung)

Ledley, R. S. u. L. B. Lusted: *Reasoning foundations of medical diagnosis.* Sciende 1959: *130*: 3366

EINGEGANGEN AM 15 VII 1971

UNIVERTITÄT MAGDEBURG
INSTITUT FÜR MEDIZININSCH
BIOLOGISCHE STATISTIK UND
DOKUMENTATION

TEOREMA LUI EGOROV PENTRU FUNCȚII ALEATOARE SEPARABILE

N. MICU

Fie (Ω, K, P) un cîmp borelian de probabilitate și $f(t, \omega)$ $(t \in R, \omega \in \Omega)$ o funcție aleatoare reală finită.

Teorema 1. Dacă există funcția reală finită $f(\omega)$ astfel ca

$$\lim_{t \to t_0} f(t, \omega) = f(\omega) \quad (\omega \in \Omega),$$

atunci pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\Omega_0 \in K$, $P(\Omega_0) > 1 - \varepsilon$ astfel încît $f(t, \omega)$ să tindă uniform către $f(\omega)$ pe Ω_0 cînd $t \to t_0$.

D e m o n s t r a ț i e. Să observăm mai întîi că $f(\omega)$ este măsurabilă. Într-adevăr, dacă $t_n \to t_0$ $(n \to \infty)$ și dacă notăm

$$X_n(\omega) = f(t_n, \omega)$$

atunci $f(\omega)$ este limita șirului de variabile aleatoare (X_n) și este deci tot o variabilă aleatoare.

Pentru orice $n \in N$ și $\delta > 0$ considerăm mulțimea

$$\Omega_{n,\delta} = \bigcap_{\tau \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta)} \left\{ \omega : |f(\tau, \omega) - f(\omega)| < \frac{1}{n} \right\}.$$

Oricare ar fi $\omega \in \Omega$ pentru δ suficient de mic, avem

$$|f(\tau, \omega) - f(\omega)| < \frac{1}{n}$$

și deci

$$\bigcup_{\delta > 0} \Omega_{n,\delta} = \Omega.$$

Prin urmare

$$\lim_{\delta \searrow 0} P(\Omega_{n,\delta}) = 1^{(*)}$$

sau

$$\lim_{\delta \searrow 0} P(\Omega^c_{n,\delta}) = 0$$

(*) Dacă $A_\delta \in K(\delta > 0)$ și $\delta > \delta' \Rightarrow A_\delta \subset A_{\delta'}$, orice atunci pentru șir $\delta_n \downarrow 0$, avem $\bigcup_{\delta > 0} A_\delta = \bigcup_{n \in N} A_{\delta_n} \in K$ și $\lim_{\delta \searrow 0} P(A_\delta) = \lim_{n \nearrow 0} P(A_{\delta_n}) = P(\bigcup_n A_{\delta_n}) = P(\bigcup_\delta A_\delta)$

Aceasta face ca pentru orice $n \in N$ și $\varepsilon > 0$ să găsim δ_n astfel încît

$$P(\Omega^c_{n,\delta n}) < \frac{\varepsilon}{2^n}$$

Fie

$$\Omega_0 = \bigcap_{n \in N} \Omega_{n,\delta n}$$

Funcția aleatoare $f(t, \omega)$ converge uniform pe Ω_0 către $f(\omega)$ dacă $t \to t_0$. Într-adevăr, dacă

$$|t - t_0| < \delta_n$$

atunci

$$|f(t, \omega) - f(\omega)| < \frac{1}{n}$$

dacă

$$\omega \in \Omega_0 \subset \Omega_{n,\delta n}$$

Pe de altă parte,

$$P(\Omega^c_0) = (P \bigcup \Omega^c_{n,\delta n}) \leqslant \sum_n P(\Omega^c_{n,\delta n}) < \varepsilon$$

sau

$$P(\Omega_0) > 1 - \varepsilon$$

și teorema este demonstrată.

Proprietatea rămîne adevărată dacă se consideră că $\sup_{t \in R} f(t, \omega)$ și $f(\omega)$ sînt a.s. finite și

$$\lim_{t \to \infty} f(t, \omega) \underset{a.s.}{=} f(\omega)$$

Deasemenea, Teorema 1, rămîne adevărată dacă se ia limita în punctul $t_0 = \infty$ sau $t_0 = -\infty$. Să demonstrăm una din aceste proprietăți.

Teorema 2. Dacă

$$\lim_{t \to \infty} f(t, \omega) = f(\omega) \ (\omega \in \Omega)$$

atunci pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\Omega_0 \in K$, $P(\Omega_0) > 1 - \varepsilon$ astfel încît să avem uniform (în ω) pe Ω_0

$$\lim_{t \to \infty} f(t, \omega) = f(\omega)$$

Demonstrația este analoagă celei precedente. Pentru $n \in N$ și $t \in R$ notăm

$$\Omega_{n,t} = \bigcap_{\tau > t} \left\{ \omega : |f(\tau, \omega) - f(\omega)| < \frac{1}{n} \right\}$$

Deoarece

$$t \uparrow \infty \Rightarrow \Omega_{n,t} \uparrow \Omega(n, \in N)$$

rezultă că

$$\lim_{t \nearrow \infty} P(\Omega_{n,t}) = 1 \quad (n \in N)$$

sau

$$\lim_{t \nearrow \infty} P(\Omega^c_{n,t}) = 0$$

Deci oricare ar fi $n \in N$ și $\varepsilon > 0$ există $t_n = t_n(\varepsilon)$ astfel ca

$$P(\Omega^c_{n,t_n}) < \frac{\varepsilon}{2^n}$$

Dacă

$$\Omega_0 = \bigcap_{n \in N} \Omega_{n,t_n}$$

atunci $f(t,\omega)$ converge uniform pe Ω_0 către $f(\omega)$ dacă $t \to \infty$. Într-adevăr, dacă $t > t_n$ atunci

$$|f(t, \omega) - f(\omega)| < \frac{1}{n}$$

pentru orice $\omega \in \Omega_0 \subset \Omega_{n,t_n}$.
Și deoarece

$$P(\Omega^c_0) = P(\bigcup_n \Omega^c_{n,tn}) \leqslant \sum_n P(\Omega^c_{n,t_n}) < \varepsilon,$$

rezultă

$$P(\Omega_0) > 1 - \varepsilon.$$

ТЕОРЕМА ЕГОРОВА ДЛЯ СЛУЧАЙНЫХ ФУНКЦИЙ

Краткое содержание

В этой работе доказано, что в том случае, если случайная функция $f(t, \omega)$ имеет предел $f(t, \omega)$ в точке t_0, тогда, существует множество вероятности, сколь уголдно близкое к единицнае котором рассмотренная сходимость является равномерной.

LE THÉORÈME D'EGOROV POUR DES FONCTIONS ALÉATOIRES SEPARABLES

Résumé

Dans cet ouvrage on démontre que, si la fonction aléatoire $f(t, \omega)$ a une limitation $f(\omega)$ dans le point t, alors il y a un grand nombre de probabilités à n'importe quel rapprochement de l'unité sur lequel la convergence considérée est uniforme.

PRIMITĂ LA 25 VIII 1971

ACADEMIA R.S. ROMÂNIA
CENTRUL DE STATISTICĂ
MATEMATICĂ

SUR LES MÉTRIQUES RELATIVISTES À SYMÉTRIE SPHÉRIQUE

N. MIHĂILEANU

Les métriques relativistes à symétrie sphérique sont de la forme

$$ds^2 = -c^2(1+\rho)\,dt^2 + \frac{dr^2}{1+\rho} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2), \tag{1}$$

où $\rho = \rho(r)$.

Pour cette métrique on a le tenseur de Ricci

$$R_0^0 = R_1^1 = -\left(\frac{\rho''}{2} + \frac{\rho'}{r}\right), \quad R_2^2 = R_3^3 = -\left(\frac{\rho}{r^2} + \frac{\rho'}{r}\right) \tag{2}$$

les autres composantes étant nulles et l'invariant de Ricci

$$R = -\left(\rho'' + 4\frac{\rho'}{r} + 2\frac{\rho}{r^2}\right). \tag{3}$$

La condition

$$R = k \tag{4}$$

(k = const.), mène à la solution

$$\rho = \frac{a}{r} + \frac{b}{r^2} - \frac{kr^2}{12} \tag{5}$$

(a, b, k étant des constantes). Alors

$$R_0^0 = R_1^1 = -\frac{b}{r^4} + \frac{k}{4}, \quad R_2^2 = R_3^3 = \frac{b}{r^4} + \frac{k}{4}. \tag{6}$$

Vu les équations d'Einstein

$$R_j^i - \frac{1}{2} R\,\delta_j^i = -\varkappa T_j^i. \tag{7}$$

cette métrique convient pour un tenseur électromagnétique ayant pour composantes

$$T_j^i = 0 \quad (i \neq j) \tag{8}$$

$$T_0^0 = T_1^1 = \frac{1}{\varkappa}\left(\frac{b}{r^4} - \frac{k}{4}\right), \quad T_2^2 = T_3^3 = -\frac{1}{\varkappa}\left(\frac{b}{r^4} + \frac{k}{4}\right) \tag{9}$$

La métrique (1) est plongée dans un espace pseudoeuclidien

$$d\sigma^2 = -\,dz_1^2 \pm dz_2^2 + dz_3^2 + dz_4^2 + dz_5^2 + dz_6^2, \tag{10}$$

en posant

$$z_1 = \sqrt{1+\rho}\,\begin{smallmatrix}\sin\\ \mathrm{sh}\end{smallmatrix}\, ct, \quad z_2 = \sqrt{1+\rho}\,\begin{smallmatrix}\cos\\ \mathrm{ch}\end{smallmatrix}\, ct, \quad z_3 = f(r),$$

$$z_4 = r\cos\varphi\sin\theta, \quad z_5 = r\sin\varphi\sin\theta, \quad z_6 = r\cos\theta \tag{11}$$

où

$$f'^2(r) = \frac{\pm\rho'^2 - 4\rho}{4(1+\rho)}. \tag{12}$$

Pour $b = 0$ tous les R_i^i sont égaux, donc on a un espace d'Einstein. Pour $k = 0$ on obtient l'espace de Reissner — Weyl. Pour $b = k = 0$ on a l'espace de Schwarzschild.

BIBLIOGRAFIE

1. T. Fujitani, M. Ikeda, M. Matsumoto: *On the imbedding of the Schwarzschild space — time.* Journal of Math. Kyoto univ 1961. I. 1. p. 43 – 61.
2. St. Ianuş: *Scufundarea metricii Reissner — Weyl,* Comunic. Acad. 13, 10, 1963, p. 857 – 862.
3. D. Smaranda: *Immersion d'un modèle d'univers avec champs magnétique dans un espace pseudo – euclidien.* Bull. Soc. Sc. Liège. 1967, nr. 3 – 4.

REÇU LE 16 XI 1971

UNIVERSITÉ DE BUCAREST
FACULTÉ DE MATHÉMATIQUE
MÉCANIQUE

ASUPRA CURBURILOR UNOR SUPRAFEȚE AVÎND SINGULARITĂȚI CONICE

T. NOAGHI

1. Introducere

Fiind dată suprafața S în R^3, descrisă de ecuațiile

$$\begin{aligned} x &= x\,(u,\, v) \\ y &= y\,(u,\, v) \\ z &= z\,(u,\, v) \end{aligned} \tag{1.1}$$

unde $(u, v) \in R^2$, iar $M\,(x, y, z)$ este un punct al acesteia, după cum bine este cunoscut, dacă funcțiile x, y, z, din grupul de ecuații (1.1) îndeplinesc condițiile de regularitate, într-o vecinătate a acestui punct, atunci este posibil a se calcula curburile: principale, medie și totală, pentru care vom folosi k_1, k_2, H, K, cu ajutorul formulelor cunoscute:

$$H = \frac{ED'' - 2FD' + GD}{\Delta} \tag{1.2}$$

$$K = \frac{DD'' - D'^2}{\Delta} \tag{1.3}$$

unde E, F, G sînt coeficienții primei forme fundamentale, Δ discriminantul acesteia, iar D, D', D'', sînt determinanții lui Gauss și cele două curburi principale sînt soluțiile ecuației:

$$k^2 - Hk + K = 0 \tag{1.4}$$

Pornind de la această posibilitate, în această lucrare vom calcula aceste curburi, în cazul unor puncte singulare de un anumit tip pe care le vom numi „puncte singulare conice".

Această clasă de puncte singulare o vom defini prin:

D e f i n i ț i a 1.1. Fiind dată o suprafață S descrisă de ecuațiile (1.1) și M_0 un punct al acesteia, acesta se numește *punct singular conic* sau *punct singular de tip conic* dacă într-o vecinătate suficient de mică a acestui punct, suprafața S poate fi identificată cu un con cu vîrful în punctul M_0.

Din definiție rezultă imediat pentru punctul M_0 proprietatea de a fi singular, deoarece el fiind vîrful conului, cu care suprafața se identifică, este un punct singular pentru con și deci și pentru suprafața S.

Singularitatea acestui punct se datorește neîndeplinirii unei condiții de regularitate în acest punct și anume aceea de a avea proprietatea de derivabilitate a funcțiilor din (1.1) cu ajutorul cărora este descrisă suprafața S.

Expresiile coeficienților E, F, G, și a determinanților lui Gauss D, D', D'', cu ajutorul cărora se exprima cele patru curburi, impun cu necesitate proprietatea de derivabilitate. Din acest motiv, cele trei formule (1.2), (1.3) și (1.4) nu sînt aplicabile în aceste puncte singulare.

Pentru rezolvarea problemei propuse — din cauza celor arătate mai sus — vom face apel la teoria distribuțiilor, pentru care problema derivabilității nu se pune.

Necesitatea rezolvării acestei probleme, depinde evident de răspunsul la întrebarea: există sau nu astfel de puncte singulare?

Răspunsul la această întrebare este afirmativ, după cum rezultă din exemplul de mai jos, ceeace exprimă faptul că problema propusă spre rezolvare nu este banală.

E x e m p l u: fie în R^3 un sistem de referință $Oxyz$, iar în planul de coordonate Oyz o curbă descrisă de ecuația

$$z = f(x) \tag{1.5}$$

unde funcția f este o funcție continuă în orice punct al domeniului său de definiție. Presupunem deasemenea că în punctul M_0 $(y_0, f(y_0)$ există numerele

$$m_1 = \lim_{\substack{y \to y_0 \\ y < y_0}} \frac{f(y) - f(y_0)}{y - y_0} \tag{1.6. a}$$

$$m_2 = \lim_{\substack{y \to y_0 \\ y > y_0}} \frac{f(y) - f(y_0)}{y - y_0} \tag{1.6. b}$$

și

$$m_1 = m_2 \tag{1.7}$$

Deci în punctul M_0 curba descrisă de ecuația (1.5) are două tangente reale de pante m_1 și m_2. Rotind această curbă în jurul unei axe (a) care să fie bisectoarea unghiului format de cele două tangente, obținem o suprafață de rotație S care într-o vecinătate suficient de mică a punctului M_0 poate fi — datorită continuității — identificată cu suprafața conului cu vîrful în punctul M_0, generat prin rotirea celor două tangente. Aceasta arată că punctul M_0 este un punct singular de tip conic, pentru suprafața S astfel obținută.

Cu aceasta nebanalitatea problemei mai sus pusă este dovedită.

Deoarece conform definiției 1.1. într-o vecinătate suficient de mică a punctului singular M_0, suprafața S se identifică cu suprafața conului C pe care îl vom numi *con asociat* suprafeței vom putea da:

D e f i n i ț i a 1.2. Dacă S este o suprafață în R^3, avînd în M_0 un punct singular de tip conic, atunci vom numi curburi: principale, medie și totală ale suprafeței S în punctul singular, curburile: principale, medie și totală ale conului asociat.

Din această definiție rezultă că, pentru rezolvarea problemei propuse, este suficient a determina aceste curburi doar pentru conul asociat.

2. Curbura totală a conului

Folosind proprietatea de invarianță a acestei curburi, față de o roto-translație, putem considera — fără a restrînge generalitatea problemei — că punctul singular al conului, adică vîrful acestuia este în originea sistemului de referință $Oxyz$, din R^3, iar axa Oz este axa conului, situație la care se poate ajunge printr-o roto-translație efectuată asupra sistemului de referință.

După cum bine este cunoscut acest con este descris de ecuația

$$x^2 + y^2 - p^2z^2 = 0 \tag{2.1}$$

Generarea acestei suprafețe se poate obține prin rotirea dreptei în jurul axei Oz. Dacă această dreaptă este situată în planul Oyz și face cu sensul pozitiv al axei Oy un unghi θ, atunci avem:

$$p = \operatorname{ctg} \theta \tag{2.2}$$

unde p^2 este coeficientul variabilei z^2 din ecuația (2.1), sau cum se poate vedea din fig. 2.1.

$$p = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \tag{2.2'}$$

unde θ este semiunghiul format de dreptele obținute prin intersecția dintre conul C și planul de coordonate Oyz, sau mai general printr-un plan ce trece prin axa Oz.

O altă observație care poate fi făcută în legătură cu acest con, este că acesta este conul asimptotic al unei familii de hiperboloizi cu două pînze, descrisă de ecuația:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} + 1 = 0 \tag{2.3}$$

unde cele două semiaxe ale hiperboloizilor sînt astfel alese ca

$$p = b/a$$

cu aceasta, familia de hiperboloizi (2.3) poate fi scrisă sub forma

$$z^2 = m^2 (x^2 + y^2 + a^2)$$

unde $m = \operatorname{tg} \theta$, deci m este o constantă caracteristică familiei, iar a este parametru familiei.

O b s e r v a ţ i e: Deoarece între m, a şi b avem relaţia:

$$m = b/a \tag{2.4}$$

şi fiindcă θ variază în intervalul $(0, \pi/2)$, putem considera că parametrul $a \geqslant 0$, proprietate ce ne va fi utilă în cele ce urmează.

Deoarece conul C este conul asimptotic al familiei de hiperboloizi $\{\mathcal{H}_a\}$ putem face observaţia că acest con poate fi considerat ca un element al familiei $\{\mathcal{H}_a\}$ corespunzător valorii parametrului $a = 0$, sau datorită continuităţii ecuaţiei (2.3′) în raport cu variabila a avem

$$C = \lim_{a \to 0} \mathcal{H}_a \tag{2.5}$$

Pentrucă elementele $\mathcal{H}_a$ ale familiei sînt formate numai din puncte regulate, oricare ar fi acest element $\mathcal{H}_a$, înseamnă că putem determina curbura acestora în orice punct al lor, în particular şi în punctul M_0 (0, 0, b).

Făcînd parametrizarea:

$$\begin{aligned} x &= u \\ y &= v \\ z &= m(u^2 + v^2 + a^2)^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \tag{2.6}$$

şi substituind parametrul a printr-un nou parametru c definit prin egalitatea:

$$c = a(1 + m^2)^{-\frac{1}{2}}$$

şi apoi folosind egalitatea (1.3), expresiile determinanţilor lui Gauss, D, D′, D″ şi a discriminantului Δ, date în (3), obţinem

$$K_c = \cos^2 \theta \, c^2 \, (u^2 + v^2 + c^2)^{-2} \tag{2.7}$$

care reprezintă curbura principală a elementului $\mathcal{H}_c$.

Făcînd şi pentru con parametrizarea:

$$\begin{aligned} x &= u \\ y &= v \\ m &= m(u^2 + v^2)^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \tag{2.8}$$

şi folosind aceleaşi rezultate ca mai sus, obţinem expresia curburii totale K_0 a acestuia:

$$K_c = 0 \tag{2.9}$$

egalitate ce are loc, evident, pentru orice punct M al conului afară de vîrf, în care egalitatea (1.3) nu are sens, din cauza neexistenţei derivatelor funcţiei (2.8). Pe baza expresiei (2.7) a curburii totale K_c obţine imediat:

$$\lim_{c \to 0} K = 0 \tag{2.10}$$

care împreună cu (2.9) ne conduce la egalitatea

$$K_0 = \lim_{c \to 0} K_c \tag{2.11}$$

egalitate care are loc, așa precum am mai spus, pentru orice punct al conului, cu excepția vîrfului acestuia.

Întrucît $c \to 0$ implică $a \to 0$ și invers, avînd în vedere egalitățile (2.5) și (2.11) vom da:

D e f i n i ț i a 2.1. Dacă C este un con și $\{\mathcal{H}_a\}$, o familie de hiperboloizi, pentru care conul C este con asimptotic, vom numi curbură totală, curbura K_0 dată de egalitatea (2.11) unde K_c este curbura totală a elementului $\{\mathcal{H}_c\}$ din familie.

O b s e r v a ț i e: Această definiție generalizează noțiunea de curbură totală, în sens obișnuit, deoarece în baza relațiilor (2.9) și (2.10) aceasta coincide cu curbura în sens obișnuit, în punctele în care aceasta există și după cum vom vedea în cele ce urmează, prin această definiție putem determina curbura totală și în anumite puncte în care aceasta nu există în sens obișnuit, bineînțeles prin alte metode decît cele obișnuite.

Evident, definiția 2.1. dată mai sus impune necesitatea studierii existenței limitei ce apare în această egalitate. Așa cum am văzut mai sus această limită există în orice punct regulat, deci rămîne de studiat problema existenței acestei limite în punctele singulare.

Deoarece alegerea sistemului de referință a fost astfel făcută, încît vîrful conului considerat să coincidă cu originea sistemului, expresia (2.7) a lui K_c arată neexistența limitei în vîrf, dacă această trecere la limită est considerată în sens obișnuit.

Din acest motiv, vom considera trecerea la limită din (2.11) într-un sens mai larg și anume în sensul teoriei distribuțiilor.

Așa precum se arată în (4) dacă limita unei funcții există în sens o iș-nuit, ea există și în sensul teoriei distribuțiilor și aceste două limite coincid. În această situație este necesar a se studia existența limitei din (2.11), în sensul distribuțiilor, doar în vecinătatea vîrfului.

Pentru aceasta, folosim faptul demonstrat în [5], că dacă avem funcția:

$$f(x, y) = \frac{n-2}{2\pi} \cdot \frac{\varepsilon^{n-2}}{(x^2 + y^2 + \varepsilon^2)} \tag{2.12}$$

unde ε este un parametru real pozitiv, atunci

$$\lim_{\varepsilon \to 0} f(x, y) = \delta(x, y) \tag{2.13}$$

unde δ este distribuția lui Dirac.

Făcînd pe $n = 2$ în expresia lui $f(x, y)$ definită prin egalitatea (2.12) obținem egalitatea

$$K_c = 2\pi \cos^2 \theta \, f_c(u, v) \tag{2.14}$$

și atunci în baza definiției lui K_0 și a relațiilor (2.14) și (2.13) obținem

$$K_0 = 2 \cos^2 \theta \, \delta(u, v) \tag{2.15}$$

Deoarece pentru distribuția lui Dirac de două variabile $\delta(u, v)$ — așa precum se arată în (1) și (4) — putem scrie

$$\delta(u, v) = \delta(u) \times \delta(v)$$

unde δ este semnul produsului direct — definit în (4) — și faptul că suportul — definit în (1) — a produsului direct este produsul cartezian al suporturilor și deoarece suportul distribuției δ (t) se reduce la punctul $t = 0$, avem că suportul distribuției δ (u, v) este format din punctul M_0 $(0, 0)$, din domeniul de variație al variabilelor u și v. Aceasta înseamnă că dacă M_0 este un punct al conului diferit de vîrf și φ (u, v) este o funcție de bază arbitrară, avînd suportul în vecinătatea punctului M_0 ca punct al planului (u, v) avem că

$$(K_0, \varphi) = 0 \tag{2.16}$$

Deoarece K_0 este diferită de zero numai în vecinătatea punctului singular, vom da:

D e f i n i ț i a 2.2. Curbura K_0 definită de egalitate (2.15) se numește curbură totală singulară.

Dacă S este o suprafață din R^3 și M un punct regulat al acesteia în acest punct putem defini o curbură totală K prin egalitatea (1.3) pe care o vom numi curbură totală regulată și o curbură totală K_0 prin egalitatea $K_0 = 0$ pe care o vom numi curbură totală singulară. Deoarece într-un punct regulat conul asociat coincide cu planul tangent, pentru care avem evident $K_0 = 0$ în toate punctele sale și deoarece în acesta avem $\theta = \pi/2$ putem considera că acest $K_0 = 0$ provine din egalitatea (2.15).

Schimbînd rolul pentru punctele singulare cu cel al punctelor regulate, deoarece în punctele singulare nu avem decît curbură totală singulară putem prelungi pe K astfel:

$$K = \begin{cases} \dfrac{DD'' - D'}{2} & \text{pt. } u^2 + v^2 \neq 0 \\ 0 & \text{pt. } u^2 + v^2 = 0 \end{cases} \tag{2.17}$$

și cu aceasta obținem curbura totală în fiecare punct al suprafeței prin relația:

$$\widetilde{K} = K + K_0 \tag{2.18}$$

În continuare vom folosi pentru cele trei tipuri de curburi următoarele denumiri:

$\widetilde{K}$ — curbură totală

K — curbură totală regulată

K_0 — curbură totală singulară

Cu aceste denumiri egalitatea de mai sus (2.18) poate fi exprimată prin:

Teorema 2.1. Curbura totală a unei suprafețe este suma curburilor regulate și singulare.

Din această teoremă și din cele stabilite mai sus rezultă:

Consecința 1. Condiția necesară și suficientă ca un punct M al unei suprafețe S să fie punct regulat este ca să avem:

$$K_0 = 0 \tag{2.19}$$

Fără a face vreo precizare, în studiul făcut în legătură cu curbura totală într-un punct, am presupus în legătură cu unghiul θ că acesta nu poate lua valoarea 0 și $\pi/2$.

Mai sus am analizat posibilitatea ca $\theta = \pi/2$ și am observat că este posibil ca unghiul θ să ia și această valoare și că aceasta corespunde cu realitatea geometrică.

Rămîne deci să analizăm dacă θ poate lua și valoarea zero. O astfel de situație avem de exemplu cînd suprafața ia naștere prin rotirea unei curbe plane care are un punct de întoarcere.

Pentru această valoare a lui θ conul asociat se reduce la o dreaptă, iar $m = \infty$ ceeace corespunde la un paraboloid degenerat, care putem considera că se obține prin degenerarea unei familii de suprafețe obținute prin rotirea unei familii de parabole:

$$z = ay^2 \tag{2.20}$$

în jurul acestei axe, unde $a = 1/p$, p reprezentînd parametrul parabolei, care degenerează pentru $p \to 0$.

Considerăm că această familie, pe care o vom nota prin este descrisă de ecuațiile parametrice:

$$\begin{aligned} x &= u \\ y &= v \\ z &= a\,(u^2 + v^2) \end{aligned} \tag{2.21}$$

pe baza aceleeaș relații (1.3) și a expresiilor determinanților D, D', D'' și Δ obținem

$$K_p = \frac{4p^2}{(u^2 + v^2 + 4p^2)^2} \tag{2.22}$$

În baza aceleiași teoreme care a fost folosită pentru calcularea lui K_0 obținem:

$$\lim K_p = 2\pi\,\delta(u, v) \tag{2.23}$$

care comparată cu (2.15) arată că aceasta este un caz particular al lui K_0 și anume valoarea acestuia pentru $\theta = 0$.

Cu alte cuvinte expresia (2.15) a lui K_0 reprezintă curbura totală singulară într-un punct conic pentru $\theta \neq 0$,

Dacă punctul singular M_0 are coordonatele (x_0, y_0, z_0) date de ecuațiile (2.6) pentru valorile $u = u_0$, $v = v_0$, atunci în mod absolut analog vom obține:

$$K_0 = 2\pi \cos^2 \theta \ \delta(u - u_0, v - v_0) \tag{2.24}$$

3. Curburile principale și curbura medie ale conului

Fie conul C descris de ecuația (2.1) care pe baza raționamentului făcut mai sus, poate fi considerat ca figură limită a familiei de hiperboloizi $\{\mathcal{H}_a\}$ dată de ecuația (2.6).

După cum bine este cunoscut, dacă S este o suprafață oarecare, atunci o curbă N trasată pe această suprafață, este o linie de curbură, dacă ea are ca tangentă în fiecare punct al său una din tangentele principale. Din acest mod de a defini curbele de curbură și din definiția tangentelor principale, rezultă că curbura unei astfel de linii este o curbură principală. Astfel, precum se arată în (3) ecuația diferențială a liniilor de curbură este:

$$(ED' - FD)\left(\frac{du}{dv}\right)^2 + (ED'' - GD)\left(\frac{du}{dv}\right) + (FD'' - GD') = 0 \tag{3.1}$$

Rezolvînd această ecuație pentru un element al familiei obținem sistemul:

$$\frac{du}{dv} = \frac{u}{v} \text{ și } \frac{du}{dv} = \frac{-v}{u}$$

care prin integrare ne conduce la soluțiile:

$$u^2 + v^2 = c \tag{3.2. a}$$

$$v = \lambda u \tag{3.2 b}$$

Deoarece prima linie de curbură pentru $c \to 0$ devine un punct al unei linii din familia (3.2. b), ale cărei elemente trec toate prin punctul $u = v = 0$, vom da

D e f i n i ț i a 3.1. Vom numi curburi principale singulare ale conului C limita cînd $c \to o$ ale valorilor extreme ale curbelor familiei (3.2. b).

Cum aceste curbe sînt situate pe hiperboloidul $\{\mathcal{H}_a\}$ ecuațiile parametrice ale acestei familii devin:

$$\begin{aligned} x &= u \\ y &= v \\ z &= m((1 + \lambda^2)\ u^2 + a^2)^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \tag{3.3}$$

Folosind formula de calcul a curburii unei curbe strîmbe:

$$k = \frac{\left| \frac{dr}{dt} \times \frac{d^2r}{dt} \right|}{\left| \frac{dr}{dt} \right|^3} \tag{3.4}$$

pentru curba descrisă de ecuațiile (3.3) obținem

$$k = \frac{ma^2}{(1 + m^2)(1 + \lambda^2)\, u^2 + a^2} \tag{3.5}$$

Din această expresie a curburii se vede imediat că aceasta are valori extreme și anume k_{max} pentru $\lambda = 0$ și k_{min} pentru $\lambda = \infty$. Ținînd cont de parametrizarea (3.3) a familiei liniilor de curburi, aceste valori corespund pentru:

$$k_{max} \quad \text{pentru } y = 0$$

$$k_{min} \quad \text{pentru } x = 0$$

Dar aceste curbe sînt niște hiperbole situate în planele de coordonate și anume în planul Oxz și respectiv Oyz.

Deoarece curburile sînt niște invarianți față de rotație, aplicînd rezultatele stabilite în (6) relativ la curburile curbelor plane, obținem — dacă în plus folosim definiția curburilor principale singulare,

$$k_1^0 = \lim k_{max} = \cos\theta\, \delta(u) \tag{3.6. a}$$

$$k_2^0 = \lim k_{min} = \cos\theta\, \delta(v) \tag{3.6. b}$$

Prin extinderea egalității adevărate pentru cazul punctelor regulate:

$$H = k_1 + k_2$$

și în cazul punctelor singulare, vom putea da:

D e f i n i ț i a 3.2. Vom numi curbură medie singulară H_0 a conului C suma curburilor principale singulare.

Astfel vom avea pentru H_0 expresia:

$$H_0 = k_1^0 + k_2^0 \tag{3.7}$$

sau ținînd cont de expresiile (3.6) ale celor două curburi principale singulare, avem

$$H_0 = \cos\theta(\delta(u) + \delta(v)) \tag{3.8}$$

În (6) se arată că egalitățile (3.6. a) și (3.6. b) sînt adevărate pentru $\theta \neq 0$, $\theta = 0$ corespunzînd cazului de regularitate, iar $\theta = 0$, cazului punctului de întoarcere.

Astfel putem enunța:

Teorema 3. 1. Condiția necesară și suficientă ca un punct M al unei suprafețe S să fie punct regulat este ca să avem

$$H_0 = K_0 = 0$$

Pe baza aceluiaș raționament pe care l-am făcut în cazul curburii totale, putem da:

Definiția 3.3. Vom numi curburi principale și respectiv curbură medie a unei suprafețe:

$$\begin{aligned} \widetilde{k}_1 &= k_1^0 + k_1 \\ \widetilde{k}_2 &= k_2^0 + k_2 \\ \widetilde{H} &= H_0 + H \end{aligned} \tag{3.9}$$

unde k_1, k_2 și H sînt curburile regulate, iar k°_i $(i = 1, 2)$ și H° sînt respectiv curburile principale singulare și curbura medie singulară.

Folosind definițiile celor trei categorii de curburi și anume: curburi principale singulare, curbură medie singulară și curbură totală singulară, precum și comportarea distribuției lui Dirac față de operația de produs direct și anume că:

$$\delta(u, v) = \delta(u) \times \delta(v) \tag{3.10}$$

relație a cărei valabilitate este dovedită în (4) putem enunța

Teorema 3.2. Dacă S este o suprafață în R^3, iar K_0, H_0 și k_i^0 $(i = 1, 2)$ sînt curburile totală, medie și principale singulare, atunci au loc egalitățile:

$$H_0 = k_1^0 + k_2^0 \tag{3.11. a}$$

$$K = k_1^0 \times k_2^0 \tag{3.11. b}$$

Se observă că aceste formule care leagă între ele cele trei tipuri de curburi singulare sînt analoage cu relațiile care leagă curburile regulate ale unei suprafețe, însă semnificația semnelor operațiilor ce apar în aceste relații (3.11) este alta decît în cazul curburilor regulate, după cum vom vedea în cele ce urmează.

Observație: Expresia (3.8) care dă în funcție de curburile principale singulare, curbura medie singulară H_0, este o sumă de două distribuții fiecare depinzînd de o singură variabilă, mai precis fiecare avînd suportu, pe o varietate cu o singură dimensiune, respectiv δ (u) și δ (v). Deoarece aceasta este o distribuție concentrată în R^2, δ (u) și δ (v) trebuiesc considerate ca fiind distribuții concentrate pe axele de coordonate, problemă ce este rezolvată în (4) și anume, dacă δ (u, v) este o funcție de bază arbitrară, atunci

$$(\delta(u), \varphi(u, v)) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(0, v)\, dv$$

$$(\delta(v), \varphi(u, v)) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(u, 0)\, du$$

BIBLIOGRAFIE

1. J. Arsac: *Transformation de Fourier et théorie des distributions* — Dunod, Paris 1961
2. H. Bremermann: *Distributions, complex-variables, and Fourier-Transforms.*
4. A. Dobrescu: *Geometrie diferenţială* — Ed. Did. şi Ped. Buc. 1963
4. I. M. Guelfand, G. E. Chilov: *Les distributions* — tome I — Dunod, Paris, 1963 1963
5. W. Kecs: *Sur les problèmes coneernant le demi-espace élastique* — Bul. Math. de la Soc. Sci. Math. Phis. de la R.P.R. tome 6 (54) nr. 3—4, 1962.
6. T. Noaghi: *Studiul curburii curbelor plane în punctele singulare, cu ajutorul teoriei distribuţiilor.* Analele Univ. Buc. seria St. Nat. — Mat. — Mec. an XVII nr. 1, 1968.

О КРИВИЗНЕ ПОВЕРХНОСТЕЙ, ИМЕЮЩИХ КОНИЧЕСКИЕ ОСОБЕННОСТИ

Краткое содержание

Рассчитаны главная, средняя и полная кривизны для случая некоторых особых точек определенного типа, называемых «особыми коническими точками».

SUR LES COURBURES DE CERTAINES SURFACES AYANT DES SINGULARITÉS CONIQUE

Résumé

On calcule les courbures: principales, moyenne et totale dans le cas de certains points singuliers d'un certain type, nommés „points singuliers coniques".

PRIMITĂ LA 1 IV 1971

INSTITUTUL DE MINE
PETROŞANI

DEDUCEREA ECUAȚIEI INTEGRO-DIFERENȚIALE VERIFICATĂ DE UN PROCES CU LEGĂTURI COMPLETE ȘI DETERMINAREA PROCESULUI PRIN INTENSITATEA SA DE VARIAȚIE

O. ONICESCU, IOANA BÎRZĂ

Procesele continui cu legături complete au fost introduse de Octav Onicescu.

Un proces cu legături complete (stîng) continuu în cîmpul de evenimente $\{\mathfrak{R}, \mathfrak{B}\}$ este caracterizat printr-o probabilitate condiționată $P(s, x; t, X)$ și o funcție $\Pi(s, x; u, Y; t, X)$, unde $x \in R$, $s, t, u \in I \subset R$, $Y, X, \in \mathfrak{B}$, $s \leqslant u \leqslant t$, satisfăcînd relația funcțională:

$$P(s, x; t, X) = \int_R \Pi(s, x; u, dy; t, X)\, P(u, y; t, X) \tag{1}$$

Probabilitatea $P(s, x; t, X)$ este presupusă:

1°. continuă un raport cu fiecare din variabilele s, t $(s < t)$, în intervalul I și în raport cu ansamblul lor, în particular este continuă în punctul t în vecinătatea lui $t = s$, adică

$$\lim_{t \to s} P(s, x; t, X) = P(s, x; s, X)$$

2°. o măsură total aditivă pentru mulțimile $X \in \mathfrak{B}$, cu condițiile:

$$P(s, x; t, X) \leqslant 1, \; P(s, x; t, R) = 1;$$

3°. integrabilă Π în raport cu x.

$$\text{rezultă } P(s, x; s, X) = \delta(x, X) = \begin{cases} 1 & x \in X \\ 0 & x \in CX \end{cases}$$

Funcția $\Pi(s, x; u, Y; t, X)$ este presupusă:

1. Continuă în raport cu $s, u, t \in I$

2. $\pi(s, x; s, Y; t, X) \geqslant 0$

Pentru t și X fixe π are proprietățile unui procea Markov.

Să introducem funcția:

$$Q_\Delta(s, x; Y; t, X) = \frac{1}{\Delta}[\Pi(s, x; s + \Delta, Y; t, X) - \Pi(s, x; s, Y; t, X)]$$

care pentru orice loc dat este;

1. continuă în raport cu s și $t \in I$

2. total aditivă în raport cu Y

3. $Q_\Delta(s, x;\ Y;\ t, X) = \begin{cases} \geqslant 0 & x \in CY \\ \leqslant 0 & x \in Y \end{cases}$

Dacă $\Delta \to 0$ atunci $\Delta Q_\Delta \to 0$, din condiția 1°.

Plecînd de la relația (1) și făcînd $s = s + \Delta$, obținem

$$\frac{1}{\Delta}[P(s+\Delta, x;\ t, X) - P(s, x;\ t, X)] = \int_R \frac{1}{\Delta}[\Pi(s+\Delta, x;\ u, dy;\ t, X) - \\ - \Pi(s, x;\ u, dy;\ t, X)]\, P(u, y;\ t, X)$$

Făcînd $u = s + \Delta$:

$$\frac{1}{\Delta}[P(s+\Delta, x;\ t, X) - P(s, x;\ t, X)] = \int_R \frac{1}{\Delta}[\Pi(s+\Delta, x;\ s+\Delta, dy;\ t, X) - \\ - \Pi(s, x;\ s+\Delta, dy;\ t, X)]\, P(s+\Delta, y;\ t, X)$$

Dar $\Pi(s, x;\ s, dy;\ t, X) = \delta(x, dy) = \Pi(s+\Delta, x;\ s+\Delta, dy;\ t, X)$

Deci

$$\frac{1}{\Delta}[P(s+\Delta, x;\ t, X) - P(s, x;\ t, X)] = -\int_R \frac{1}{\Delta}[\Pi(s, x;\ s+\Delta, dy;\ t, X) - \\ - \Pi(s, x;\ s, dy;\ t, X)]\, P(s+\Delta, y;\ t, X)$$

sau:

$$\frac{1}{\Delta}[P(s+\Delta, x;\ t, X) - P(s, x;\ t, X)] = -\int_R Q_\Delta(s, x;\ dy;\ t, X)\, P(s + \\ + \Delta, y;\ t, X)$$

Presupunem că există intensitate de variație, adică există

$$\lim_{\Delta \to 0} Q_\Delta(s, x;\ dy;\ t, X) = Q(s, x;\ dy;\ t, X)$$

În acest caz procesul verifică ecuația integro-diferențială:

$$\frac{\partial P(s, x;\ t, X)}{\partial s} = -\int_R Q(s, x;\ dy;\ t, X)\, P(s, y;\ t, X) \qquad (2)$$

cu $$P(t, x;\ t, X) = \delta(x, X)$$

sau, notînd $\theta(s, x) = P(s, x;\ t, X)$:

$$\frac{\partial \theta(s, x)}{\partial s} = -\int_R Q(s, x;\ dy;\ t, X)\, \theta(s, y),\ s < t \qquad (3)$$

cu $$\theta(t, x) = \delta(x, X)$$

Să găsim ecuaţia verificată de $\Pi(s, x; u, Y; t, X)$

În relaţia:

$$P(s, x; t, X) = \int_R \Pi(s, x; u, dy; t, X)\, P(u, y; t, X)$$

derivăm faţă de u:

$$0 = \int_R \frac{\partial \Pi(s, x; u, dy; t. X)}{\partial u} P(u, y; t, X) +$$

$$+ \int_R \Pi(s, x; u, dy; t, X) \frac{\partial P(u, y; t, X)}{\partial u}$$

Dar din (2):

$$\frac{\partial P(u, y; t, X)}{\partial u} = -\int_R Q(u, y; dz; t, X)\, P(u, z; t, X)$$

Deci:

$$\int_R \frac{\partial \Pi(s, x; u, dz; t, X)}{\partial u} P(u, y; t, X) -$$

$$-\int_R \Pi(s, x; u, dy; t, X) \int_R Q(u, y; dz; t, X) \cdot P(u, z; t, X) = 0$$

Schimbînd variabila de integrare din primul termen în z, şi dînd factori $P(u, z; t, X)$ obţinem relaţia integrală:

$$\int_R \left[\frac{\partial \Pi(s, x; u, dz; t, X)}{\partial u} - \int_R \Pi(s, x; zu, dy; t, X) \cdot Q(u, y; dz; t, X) \right] \cdot$$

$$\cdot P(u, z; t, X) = 0 \qquad (5)$$

Integrarea sistemului (3)

$$\frac{\partial \theta(s, x)}{\partial s} = -\int_R Q(s, xdy; t, X)\, \theta(s, y), \quad s < t$$

$$\theta(t, x) = \delta(x, X)$$

Integrăm de la s la t

$$\theta(s, x)_s^t = -\int_s^t du_1 \int_R Q(u_1\, x; dy_1; t, X)\, \theta(u_1\, y_1)$$

sau

$$\theta(s, x) = \theta(t, x) + \int_s^t du_1 \int_R Q(u_1, x; dy_1; t, X)\, \theta(u_1, y_1) =$$

$$= \delta(x, X) + \int_s^t du_1 \int_R Q(u_1, x; dy_1; t, X)\, \theta(u_1, y_1).$$

Analog

$$\theta(u_1, y_1) = \delta(y_1, X) + \int_{u_1}^{t} du_2 \int_R Q(u_2, y_1; dy_2; t, X)\, \theta(u_2, y_2)$$

Înlocuind

$$\theta(s, x) = \delta(x, X) + \int_s^r du_1 \int_R Q(u_1, x; dy_1; t, X)\, \delta(y_1, X) +$$

$$+ \int_s^t du_1 \int_{u_1}^{t} du_2 \int_{R^2} Q(u_1, x; dy_1; t, X)\, Q(u_2, y_1; dy_2; t, X)\, \theta(u_2, y_1)$$

sau

$$\theta(s, x) = \delta(x, X) + \int_s^t Q(u_1, x; X; t, X)\, du_1 +$$

$$+ \int_s^t du_1 \int_{u_1}^{t} du_2 \int_{R^2} Q(u_1, x; dy_1; t, X)\, Q(u_2, y_1; dy_2; t, X)\, \theta(u_2, y_2)$$

Continuînd se ajunge la:

$$\theta(s, x) = \delta\, X) + (x, \int_s^t Q(u_1, x; X; t, X)\, du_1 + \ldots\ldots +$$

$$+ \int_s^t du_1 \int_{u_1}^{t} du_2 \ldots \int_{u_{n-1}}^{t} du_n \int_{R^n} Q(u_1, x; dy_1; t, X)\, Q(u_2, y_1; dy_2;$$

$$t, X) \ldots\ldots Q(u_n, y_{n-1}, dy_n; t, X)\, \theta(u_n, y_n)$$

Obținem dezvoltarea:

$$\theta(s, x) = P(s, x; t, X) = \sum_{l=0}^{n} B_l(s, x; t, X) + S_n(s, x; t, X) \text{ cu} \tag{6}$$

$$S_n = \int_s^t du_1 \int_{u_1}^{t} du_2 \ldots \int_{u_{n-1}}^{t} du_n \int_{R^n} Q(u_1, x; dy_1; t, X)\, Q(u_2, y_1; dy_2;$$

$$t, X) \ldots\ldots Q(u_n, y_{n-1}; dy_n; t, X)\, \theta(u_n, y_n) \quad \text{și}$$

$$B_l = \int_s^t du_1 \int_{u_1}^{t} du_2 \ldots \int_{u_{l-1}}^{t} du_l \int_{R^{l-1}} Q(u_1, x; dy_1; t, X)\, Q(u_2, y_1; dy_2;$$

$$t, X) \ldots Q(u_l, y_{l-1}; X; t, X)$$

Determinarea procesului cu legături complete prin intensitatea sa de variație

Sistemele (3) și (5) sînt o consecință a procesului $P(s, x; t, X)$, $\Pi\,(s, x; u, Y; t, X)$ dat. La fel și dezvoltarea corespunzătoare (6).

Aceste dezvoltări se exprimă cu ajutorul intensității de variație $Q(u, x; Y; t, X)$ care poate fi o funcție sau numai o funcțională pe spațiul $I \times R \times \mathcal{B} \times I \times \mathcal{B}$.

Problema inversă de a determina un proces cînd se dă $Q(u, x; Y; t, X)$ revine la a determina în ce condiţii o funcţională $Q(u, x; Y; t, X)$ corespunde unui proces stochastic continuu cu legături complete. Vom da condiţii suficiente. Considerăm procesele stochastice corespunzătoare unei intensităţi date de o funcţie.

Teorema

Fie $Q(u, x; Y; t, X)$ o funcţie cu valori reale definită pe spaţiul $I \times R \times \mathcal{B} \times I \times \mathcal{B}$. Presupunem că această funcţie este:

α) continuă în raport cu $u, t, \in I \subset R$

β) integrabilă Q în raport cu x

γ) total aditivă în raport cu X

δ) $Q(u, x;, Y; t, X) \begin{cases} \leqslant 0 & x \in Y \\ \geqslant 0 & x \in CY \\ = 0 & Y = R \end{cases}$

ε) seria $\sum_{n=1}^{\infty} B_n(s, t; x, X)$ este absolut şi uniform convergentă pentru $s, t \in I_1, \quad I_1 \subset I$

ε') seria $\sum_{n=1}^{\infty} A_n(s, x; u, Z; t, X)$ este absolut şi uniform convergentă pentru $s, t, u \in I_2 \subset I, \qquad I_1 \cap I_2 \neq \emptyset$

În aceste condiţii funcţiile:

$$P(s, x; t, X) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n(s, t; x, X) \tag{6}$$

şi

$$\Pi(s, x; u, Z, t, X) = \sum_{n \in N} A_n(s, x; u, Z; t, X) \tag{7}$$

reprezintă procesul stochastic cu legături complete care are ca intensitate de variaţie $Q(u, x; Y; t, X)$ unde B_n şi A_n au expresiile următoare:

$$B_n(s, t; x, X) = \int_s^t du_1 \int_{u_1}^t du_2 \ldots \int_{u_{n-1}}^t du_n \int_{R^{n-1}} Q(u_1, x; dy_1; t, X) \cdot$$
$$\cdot Q(u_2, y_1; dy_2; t, X) \ldots Q(u_n, y_{n-1}, X; t, X) \tag{6'}$$

și

$$A_n(s, x;\ u, Z;\ t, X) = \int_s^u dv_1 \int_s^{v_1} dv_2 \ldots \int_s^{v_{n-1}} dv_n \int_{R^{n-1}} Q(v_n, x;\ dy_{n-1};\ t, X) \cdot$$

$$\times Q(v_{n-1}, y_{n-1};\ dy_{n-2};\ t, X) \ldots Q(v_1, y_1;\ Z;\ t, X) \qquad (7')$$

D e m o n s t r a ț i e. Observăm mai întîi că din relația (6′) rezultă că $B_n(s, t;\ x, X)$ este pentru orice s și $t (s < t)$ continuă în raport cu s și t, integrabilă în raport cu x și total aditivă în raport cu X. Din convergența uniformă a seriei (6) în orice interval finit cuprins în intervalul I_1, rezultă că suma este deasemenea continuă într-un atare interval, integrabilă în raport cu x și total aditivă în raport cu X. Rezultă și $P(s, x;\ s, X) = B_0(s, x;\ s, X) = \delta(x, X)$.

De asemenea din (7′) rezultă că $\Pi(s, x;\ u, Y;\ t, X)$ este continuă în raport cu s și t, $s, t \in I_2 \subset R$ și $\Pi(s, x;\ s, Y;\ t, X) = A_0(s, x;\ x, Y;\ t, X) = \delta(x, Y)$.

Să arătăm că P și Π verifică relația ce caracterizează un proces cu legături complete. Să considerăm integrala:

$$L(u) = \int_R \Pi(s, x;\ u, dy;\ t, X)\ P(u, y;\ t, X),\ s \leqslant u \leqslant t \qquad (8)$$

a cărei existență rezultă din proprietățile funcției $Q(u, x;\ Y;\ t, X)$ pentru $s, t, \in I_1 \cap I_2$, $x \in S$, $Y, X \in \mathfrak{B}$.

Din (8) rezultă:

$$\frac{1}{\Delta}[L(u + \Delta) - L(u)] = \int_R \frac{1}{\Delta}[\Pi(s, x;\ u + \Delta;\ dy;\ t, X)\ P(u + \Delta, y;\ t, X) -$$

$$- \Pi(s, x;\ u, dy;\ t, X)\ P(u, y;\ t, X)] = \int_R \frac{1}{\Delta}[\Pi(s, x;\ u + \Delta, dy;\ t, X) -$$

$$- \Pi(s, x;\ u, dy;\ t, X)]\ P(u + \Delta, y;\ t, X) + \int_R \Pi(s, x;\ u, dy;\ t, X) \frac{1}{\Delta}[P(u +$$

$$+ \Delta, y;\ t, X) - P(u, y;\ t, X)]$$

Trecînd la limită pentru $\Delta \to 0$:

$$\frac{dL(u)}{dt} = \int_R \frac{\partial \Pi(s, x;\ u, dy;\ t, X)}{\partial u} P(u, y;\ t, X) +$$

$$+ \int_R \Pi(s, x;\ u, dy;\ t, X) \frac{\partial P(u, y;\ t, X)}{\partial u} \qquad (9)$$

$$\text{din } P(s, x;\ t, X) = \sum_{l \in N} B_l(s, x;\ t, X)$$

$$\text{cu } B_l(s, x; t, X) = \int_s^t du_1 \int_{u_1}^t du_2 \ldots \int_{u_{l-1}}^t du_l Q(u_1, x; dy_1; t, X) \cdot$$

$$\cdot Q(u_2, y_1; dy_2; t, X) \ldots Q(u_l, y_{l-1}; X; t, X)$$

și din ε) rezultă:

$$P(s, x; t, X) = \delta(x, X) + \int_s^t du_1 \int_R Q(u, x; dy; t, X) \; P(u, y; t, X)$$

de unde

$$\frac{\partial P(s, x; t, X)}{\partial s} = -\int_R Q(s, x; dy; t, X) \; P(s; y; t, X)$$

și deci

$$\frac{\partial P(u, y; t, X)}{\partial u} = -\int_R Q(u, y; dz; t, X) \; P(u, z; t, X) \tag{10}$$

Analog din:

$$\Pi(s, x; u, dz; t, X) = \sum_{l \in N} A_l(s, x; u, dz; t, X) \text{ cu } A_l = \int_s^u dv_1 \int_s^{u_1} dv_2 \ldots$$

$$\ldots \int_s^{v_{l-1}} dv_l \, Q(v_l, x; dy_{l-1}; t, X) \, Q(v_{l-1}, y_{l-1}, dy_{l-2}; t, X) \ldots Q(v_1, y_1; dz; t, X)$$

și din ε′) rezultă:

$$\Pi(s, x; u, dz; t, X) = \delta(x, dz) + \int_s^u dv_1 \int_R \Pi(s, x; v_1, dy; t, X) \, Q(v_1, y; dz; t, X)$$

de unde

$$\frac{\partial \Pi(s, x; u, dz; t, X)}{\partial u} = \int_R \Pi(s, x; u, dy; t, X) \, Q(u, y; dz; t, X) \tag{11}$$

Înlocuind (10) și (11) în (9) rezultă:

$$\frac{dL(u)}{du} = \int_R \int_R \Pi(s, x; u, dz; t, X) \; Q(u, z; dz; t, X) \; P(u, y; t, X) -$$

$$- \int_R \Pi(s, x; u, dy; t, X) \int_R Q(u, y; dz; t, X) \; P(u, z; t, X) = 0$$

Deci $L(u)$ nu depinde de u. Făcînd în (8) $u = s$:

$$L(u) = (L(s) = \int_R \Pi(s, x; s, dy; t, X) \; P(s, y; t, X) =$$

$$= \int_R \delta(x, dy) \; P(s, y; t, X) = P(s, x; t, X)$$

Înlocuind în (8):

$$P(s, x; t, X) = \int_R \Pi(s, x; u, dy; t, X) \quad P(u, y; t, X)$$

adică relația caracteristică procesului cu legături complete.

Să arătăm că $P(s, x; t, X)$ este o probabilitate.
Am arătat că $P(s, x; t, X)$ este total aditivă în raport cu X și din proprietățile lui Q:

$$Q(u, x; Y, t, X) \begin{cases} \leqslant 0 & x \in Y \\ \geqslant 0 & x \in CY \\ = 0 & Y = R \end{cases}$$

avem $Q(u, x; R; t, X) = 0$ și rezultă $B_l(s, x; t, R) = 0$, $n = 1, 2, \ldots$

Cum $B_0(s, x; t, R) = \delta(x, R) = 1$ obținem $P(s, x; t, R) = 1$

Rămîne să arătăm că $P(s, x; t, X) \geqslant 0$

Dacă arătăm că $\Pi(s, x; u, y; t, X) \geqslant 0$, atunci din relația:

$$P(s, x; t, X) = \int_R \Pi(s, x; u, dy; t, X)\, P(u, y; t, X)$$

făcînd $u = t$ rezultă:

$$P(s, x; t, X) = \int_R \Pi(s, x; t, dy; t, X)\, P(u, y; t, X) =$$

$$= \int_R \Pi(s, x; t, dy; t, X)\, \delta(y, X) = \int_X \Pi(s, x; t, dy; t, X) =$$

$$= \Pi(s, x; t, X; t, X) \geqslant 0$$

Deci $$P(s, x; t, X) \geqslant 0$$

Aplicînd teorema creșterilor finite funcției $(s, x; u, dy; t, X)$:

$$\Pi(s, x; s + \Delta, Y; t, X) - \Pi(s, x; s, Y; t, X) = \Delta \left(\frac{\partial \Pi}{\partial u}\right)_{u = s + \theta\Delta}, \quad 0 < \theta < 1$$

Din (11):

$$\frac{\partial \Pi(s, x; u, Y; t, X)}{\partial u} = \int_R \Pi(s, x; u, dz; t, X)\, Q(u, z; Y; t, X)$$

Deci $$\Pi(s, x; s + \Delta, Y; t, X) - \Pi(s, x; s, Y,; t, X) =$$

$$= \Delta \int_R \Pi(s, x; s + \theta\, \Delta, dz; t, X)\, Q(s + \theta\, \Delta, z; Y; t, X)$$

Presupunem $\Delta > 0$. Membrul al doilea tinde continuu către:

$$\Delta \int_R \Pi(s, x; s, dz; t, X)\, Q(s, z; Y; t, X) =$$

$$= \Delta \int_R \delta(x, dz)\, Q(s, z; Y; t, X) = \Delta\, Q(s, x; Y; t, X)$$

Dacă $x \in CY$ atunci primul membru este

$$\Pi(s, x;\ s + \Delta\ , Y;\ t, X) - \delta(x, Y) = \Pi(s, x;\ s + \Delta, Y;\ t, X)$$

iar dacă Δ e suficient de mic atunci al doilea membru este pozitiv deci $\Pi(s, x; s + \Delta, Y; t, X)$ este pozitiv dacă Δ este suficient de mic.
Dacă $x \in Y$ atunci $\Pi(s, x; s, Y; t, X) = \delta\,(x, X) = 1$ deci dacă Δ e suficient de mic avem de asemenea $\Pi(s, x; s + \Delta\ , Y; t, X\ ) > 0$.
În general deci $\Pi(s, x; s + \Delta, Y; t, X) \geqslant 0$ pentru orice s, x, Y, t, X
Deci $P\,(s, x; s + \Delta, Y) \geqslant 0$ pentru Δ mic.

Folosind (1):

$$P(s, x;\ t, X) = \int_R \Pi(s, x;\ u, dy; t, X)\ P(u, y;\ t, X)$$

vom arăta că $P(s, x; t, X) \geqslant 0, \quad s < t$

Dacă punem $\Delta_n = \frac{t-s}{n}$, $t - s = n\Delta_n\ t = s + n\Delta_n$ şi luăm $u = s + \Delta_n$ în (1):

$$P(s, x;\ t, X) = \int_R \Pi(s, x;\ s + \Delta_n, dy;\ t, X)\ P(s + \Delta_n, y;\ t, X)$$

Continuînd

$$P(s, x;\ t, X) = \int_R \Pi(s, x; s + \Delta_n, dy_1;\ t, X) \int_R \Pi(s + \Delta_n, y_1 s + 2\Delta_n, dy_2; t, X) \cdot$$

$$\cdot\ P(s + 2\Delta_n,\ y_2;\ t,\ X) = \int_{R^2} \Pi(s, x; s + \Delta_n,\ dy_1;\ t,\ X)\ \Pi(s + \Delta_n,\ y_1,\ s +$$

$$+ 2\Delta_n,\ dy_2; t,\ X)\ P(s + 2\Delta_n,\ y_2;\ t,\ X) = \int_{R^3} \Pi(s, x;\ s +$$

$$\Delta_n, dy_1;\ t,\ X)\ \Pi(s + \Delta_n,\ y_1; s + 2\Delta_n,\ dy_2;\ t,\ X) \cdot$$

$$\cdot\ \Pi(s + 2\Delta_n,\ y_2; s + 3\Delta_n,\ dy_3;\ t,\ X)\ P(s + 3\Delta_n,\ y_3;\ t,\ X)$$

După n paşi:

$$P(s,\ x;\ t,\ X) = \int_{R^n} \Pi(s, x; s + \Delta_n,\ dy_1; t,\ X)\ \Pi(s + \Delta_n y_1; s +$$

$$+ 2\Delta_n, dy_2; t,\ X) \ldots\ldots P\,(s + n\,\Delta_n;\ y_n;\ t,\ X).$$

Cum creşterile elementare sînt $\geqslant 0$ rezultă $P(s, x; t, X) \geqslant 0$

Teorema este astfel demonstrată.

O b s e r v a ţ i e : Pornind de la relaţia (11): şi înmulţind cu $P(u,z; t, X)$ (finit) obţinem

$$\left[\frac{\partial \Pi(s,\ x;\ u,\ dz;\ t,\ X)}{\partial u} - \int_R \Pi(s, x; u, dy; t, X)\ Q(u, y; dz; t, X)\right] P(u, z; t, X) = 0$$

deci şi

$$\int_R \left[\frac{\partial \Pi(s, x; u, dz; t, X)}{\partial u} - \int_R \Pi(s, x; u, dy; t, X)\, Q(u, y; dz; t, X) \right]$$
$$P(u, z; t, X) = 0$$

integrandul fiind nul.

Am regăsit deci relaţia integrală (5) ce caracterizează procesul cu legături complecte.

BIBLIOGRAFIE

1. Octav Onicescu: *Procese aleatoare în lanţ continuu cu legături complete* — Revista Universităţii Bucureşti şi a Politehnicii Bucureşti, seria ştiinţele naturii 4—5, 73—85 din 1954
   — *Calculul probabilităţilor,* — Editura tehnică, Bucureşti 1956
   — *Teoria probabilităţilor şi aplicaţii* — Editura didactică şi pedagogică 1963
2. O. Onicescu, G. Mihoc şi C. Ionescu-Tulcea: *Calculul probabilităţilor şi aplicaţii* — Editura Academiei R.P.R., Bucureşti, 1956
3. Ciucu G. şi Teodorescu R.: *Procese cu legături complete* — Editura Academie R.P.R., 1960

ПОЛУЧЕНИЕ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ, КОТОРЫЕ ХАРАКТЕРИЗИРУЮТ ПРОЦЕСС С ПОЛНЫМИ СВЯЗЯМИ, И ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРОЦЕССА ИХ ВАРИАЦИОННОЙ ИНТЕНСИВНОСТЬЮ.

Краткое содержание

Работа дает некоторые интегро-дифференциальные уравнения, которые характеризируют процесс с полными связями, а также достаточное условие существования процесса.

INTEGRAL DIFFERENTIAL EQUATIONS VERIFIED BY A CONTINOUS PROCESS WITH COMPLETE CONNECTIONS AND DETERMINATION OF THE PROCESS BY ITS VARIATION INTENSITY

Abstract

The paper gives us the integral — differential equations verified by a continuous process with complete connections and gives a sufficient condition for the existence of the process.

Primită la 15 XI 1971

UNIVERSITATEA BUCUREŞTI
FACULTATEA DE MATEMATICĂ-MECANICĂ
INSTITUTUL DE CONSTRUCŢII BUCUREŞTI

ON THE THEORY OF THERMAL LOCKING MEDIA

C. T. SUN, R. L. SIERAKOVSKI, N. CRISTESCU

x_i	Coordinates (x, y, z)
t	Time
σ_{ij}	Stress components
F_j	Body force per unit mass
T_i	Surface traction
u_i	Displacements
ϵ_{ij}	Strain components
Q	Heat flux
U	Internal energy
W	Work
T	Temperature
S	Entropy
H	Helmholtz free energy
A	Area
V	Volume
g, G	Locking functions
$k/3 = k_m$	Locking parameter
ρ	Density of material
λ	Lagrangian multiplier

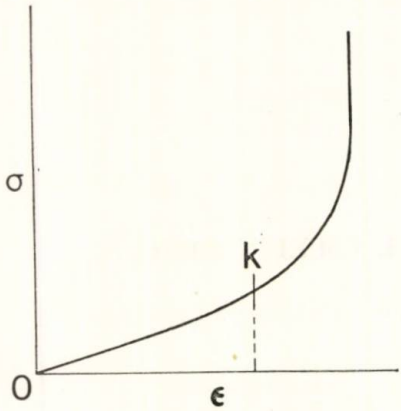
Example, Thick-walled sphere

σ_r, σ_θ, σ_φ	Stresses
ϵ_r, ϵ_θ, ϵ_φ	Strains
u	Radial displacement
α	Coefficient of thermal expansion
E	Elastic modulus
υ	Poisson's ratio
a, b	Inner, outer radii
t	Locking boundary

INTRODUCTION

In recent years a continuing trend to the establishment of more realistic descriptions of material behavior has appeared in the literature. One such development concerns the concept of a locking material as discussed by W. Prager [1] in 1957. It was noted that for certain types of materials, such as distended solids, the material would deform freely for small values of strain; however, when a certain critical value of strain was reached, the material was capable of sustaining large values of stress, Fig. 1. This critical value of strain was called the locking parameter and is denoted by the symbol k. Extensions of this model were then proposed to represent the observed behavior of other materials. In another paper, Prager [2] introduced the concept of an elastic material with limited compressibility, as shown in Fig. 2. In this model, the dilatational and distortional behavior of the material were introduced; the material was considered to be incompressible for some value of dilatation Δ, while remaining distortionally elastic. Further extensions of the concept of locking materials were introduced by Phillips [3]. Such classi-

Figure 1 — Stress-strain diagram of cellular rubber.



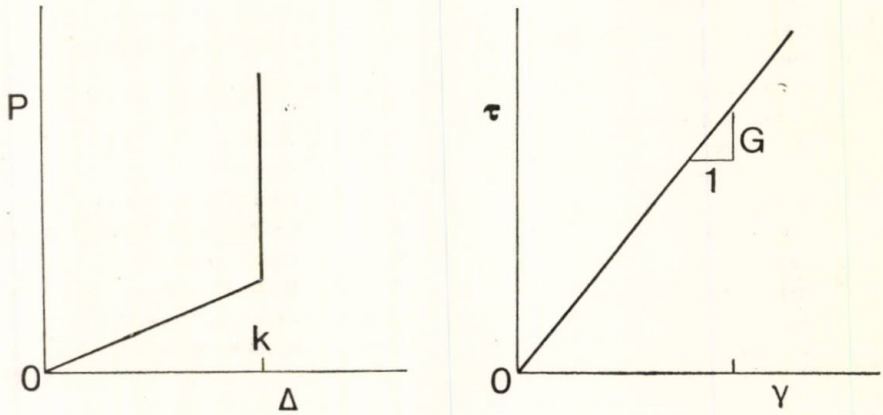


Figure 2 — Stress-strain diagram of medium with limited compressibility.

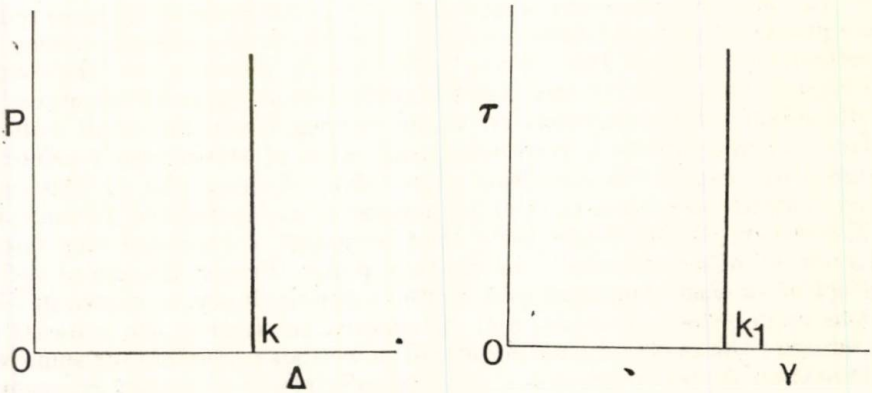


Figure 3 — Stress-strain diagram of ideal locking medium.

fications of material behavior are shown for ideal locking media in Fig. 3, and elastic-perfectly locking media in Fig. 4. For each of these last models, in which dilatational and distortional behavior is considered separately, the rheological equations of state are found to be independent because of the implicit assumption of small strains. For finite strains, this is not the case, as has been shown by Sun [4].

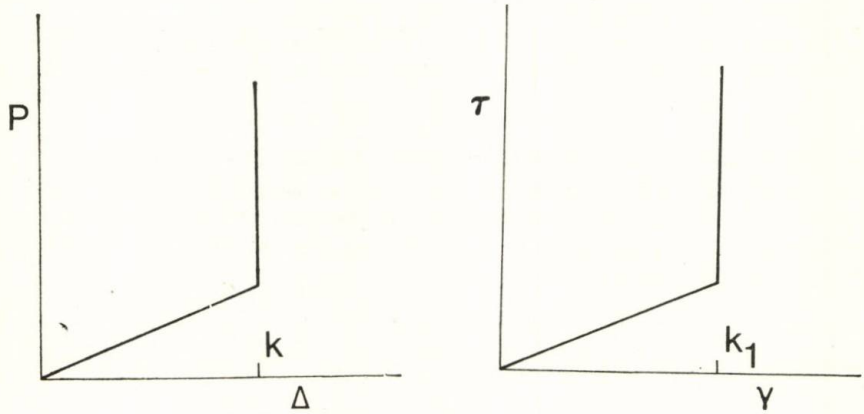


Figure 4 — Stress-strain diagram of an elastic perfectly locking medium.

Other extensions and applications of models of onedimensional-locking materials, used in conjunction with elastic-plastic materials, have been mentioned for example by Cristescu [5] in solving wave propagation problems. In addition, some mechanical and physical models, illustrating the behavior of locking materials, have been discussed by Flugge [6].

In the present paper the theory of locking materials is extended to include the influence of temperature. The constitutive equations are derived from thermodynamic principles. In order to facilitate the presentation of the physical aspects of the problem we restrict the discussion to media subjected to small strains. Application of the analysis is developed for a particular problem, that of a thick-walled sphere subjected to a radial temperature gradient. Results are presented for the stresses in a thermally locked medium in terms of the important geometrical and physical parameters.

I. FORMULATION OF THERMOELASTIC LOCKING EQUATIONS

a. Thermodynamical Considerations

In the present investigation, we derive the constitutive equations for an elastic locking material, including thermal effects, from thermodynamic principles.

Consider a bounded body subjected to surface tractions and inertia loadings. If we examine dynamic equilibrium of an element of the body, the governing equations are writen as.

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} + \rho F_j = \rho \frac{\partial^2 u_j}{\partial \widetilde{t}^2} \tag{1}$$

For the case in which the loading is considered quasistatic, equation (1) simplifies to a homogeneous differential equation.

We now introduce the First Law of Thermodynamics, which represents simply an energy balance [7]. For an element of an elastic body we can write

$$\delta Q = \delta U - \delta W \tag{2}$$

where the symbols have been previously defined (see „Notation"), and Q is positive if heat is transferred to the system, while W is positive if work is done on the system. We also require the Second Law of Thermodynamics [7], which introduces the definition of entropy and is expressed in differential form for a reversible system as,

$$\delta Q = T\,\delta S \tag{3}$$

Substituting (3) into (2), we obtain

$$T\delta S = \delta U - \delta W \tag{4}$$

We now examine the work term δW in terms of the deformation taking place. To establish such an expression for δW, we introduce the principle of virtual work,

$$\delta W = \int_A \widetilde{T}_i\, \delta u_i\, dA + \int_V \rho F_i\, \delta u_i\, dV \tag{5}$$

The surface tractions $\widetilde{T}_i$ can be expressed in terms of the stress components and the unit normal vector to the element of surface area dA by

$$\widetilde{T}_i = \sigma_{ij} n_j \tag{6}$$

Using (6) and applying Gauss' theorem relating surface and volume integrals, we obtain

$$\delta W = \int_V \left[\frac{\partial}{\partial x_j} (\sigma_{ij}\, \delta u_i) + \rho F_i\, \delta u_i \right] dV \tag{7}$$

We observe that the integrand contains the equilibrium equation and can thus be simplified to

$$\delta W = \int_V \sigma_{ij} \delta(u_{i,j})\, dV \tag{8}$$

where the term $\delta(u_{i,j})$ can be written as

$$\delta(u_{i,j}) = \delta\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right) = \delta(\varepsilon_{ij}) \tag{9}$$

Therefore, the work per unit volume can be expressed as

$$\delta W = \sigma_{jk}\delta\varepsilon_{jk} \tag{10}$$

Substituting (10) into (4), the first law of thermodynamics becomes

$$T\delta S = \delta U - \sigma_{ij}\delta\varepsilon_{ij} \tag{11}$$

We now introduce the Helmholtz free energy

$$H = U - TS \tag{12}$$

Indifferential form

$$\delta H = \delta U - T\delta S - S\delta T \tag{13}$$

Using (11) and (13), we write

$$\delta H = -S\delta T + \sigma_{ii}\delta\varepsilon_{ii} \tag{14}$$

We now recall from basic thermodynamic theory, that stress, strain, temperature, entropy, internal energy and free energy are thermodynamic state variables. Now, if one state variable is expressible in terms of other state variables, the functional relationship describing this is called an equation of state and the variable is called a state function. The latter is a characteristic function of the material, and is usually determined from experiments, or derived from the microscopic theory of solids. It is possible to select this characteristic function in each problem, the choice being to a certain extent arbitrary. Here we take the equation of state in terms of the Helmholtz free energy function as

$$H = H(\varepsilon_{ij}, T) \tag{15}$$

An expression for the incremental change in the free energy expression is therefore

$$\delta H = \frac{\partial H}{\partial \varepsilon_{ij}}\delta\varepsilon_{ij} + \frac{\partial H}{\partial T}\delta T \tag{16}$$

b. **Locking Condition**

In order to complete the development of the constitutive relations, the introductory remarks for the adiabatic-isothermal, one dimensional stress-strain relations are now extended to a seven-dimensional strain-temperature space. Analogous to the functional relation defining yielding for plastically deforming bodies [8], we introduce a locking function $g(\varepsilon_{ij}, T)$, (or an equivalent one $G(\varepsilon_{ij}, T)$ b) which is a regular function of the six-strain components and temperature T. A point P in the medium is considered locked if the six-strain components and temperature T satisfy the following condition:

$$G(\varepsilon_{ij}, T) = g(\varepsilon_{ij}, T) - k(T) = 0 \tag{17}$$

where k is the locking parameter. It is generally a function of the temperature but can be considered an absolute constant in some particular cases of ideal locking. For locking properties which are non-perfect, k may depend on stress state as well.

For states satisfying $q < k$ the material responds elastically, and for elastic-perfectly locking material, values of $g > k$ are not admissible.

Geometrically the locking function $G(\varepsilon_{ij}, T) = 0$ represents a surface in seven-dimensional strain, temperature space. The change of dimensions of this surface due to temperature variation do not however follow in correspondence with that of an elastic-plastic yield surface. In order to establish in what way the dimensions of the locking surface depend on temperature, some basic experiments on similar rubber band specimens were conducted at elevated temperatures. Nominal dimensions of the specimens were. 065″ width, .050″ thickness, and free length of 0.90 inches. The specimens were looped over dowel pins and pulled in tension on a Tinius Olsen testing machine at a cross head movement of 2 in/min for three temperature ranges of 73°, 155°, and 235°F. Results from the tests are shown in Fig. 5 where each curve

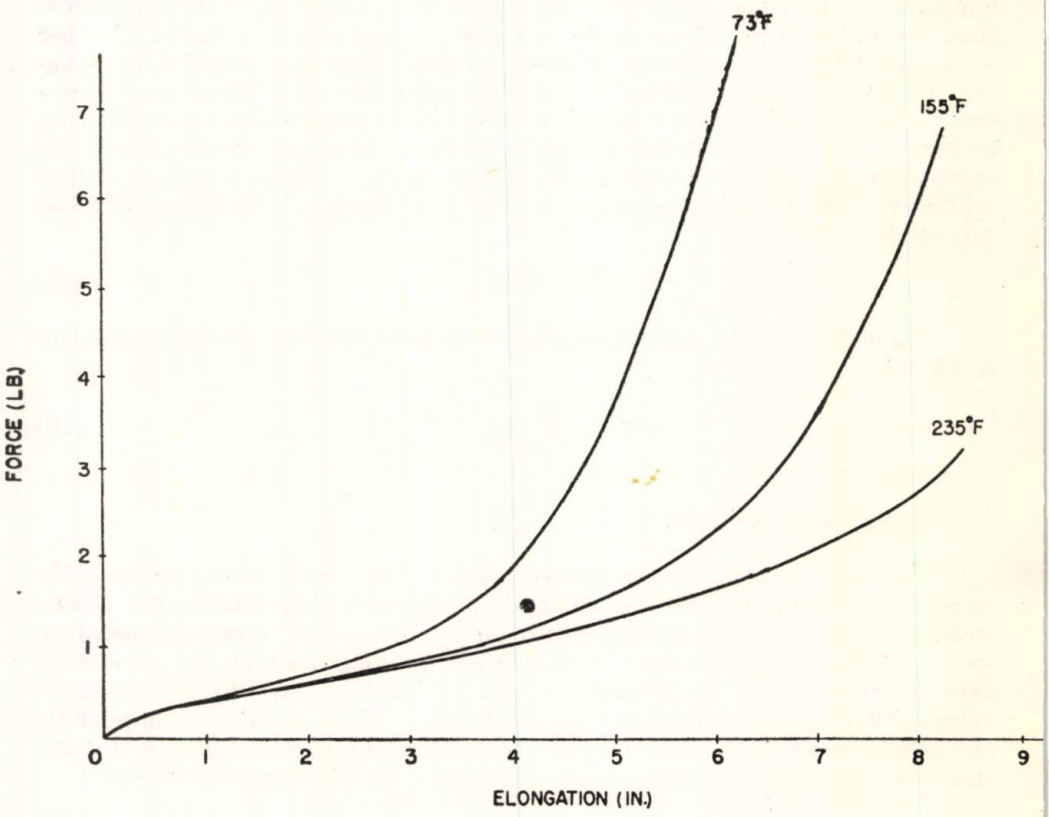


Figure 5 — Experimental load-deformation curves for rubber at various temperatures.

describes the average of a minimum of three tests at each temperature. Each of the individual tests was reproducible in that deviations from the average response at any temperature was less than five per cent. Similar results are also presented in [9] where the interesting phenomenon of inversion occurs for low temperatures. This physical phenomenon is caused by recrystalization of the material. From these experimental results it is possible to establish the size of the locking curve in strain-temperature space if restriction is placed on considering material response to temperatures greater than the recrystalization temperature. To establish the definition of locking for a given temperature, by analogy with the elastic-plastic case, one can define the limit of the elastic region in a similar manner.

Having established the form of the locking function, we can now discuss the conditions for material loading and unloading. The perfectly-locking medium is considered loaded if at some point P (Fig. 6)

$$G(\varepsilon_{ij}, T) = 0 \quad \text{and} \quad \delta G = 0 \tag{18}$$

and the medium is considered in elastic state (either in the initial elastic state or during unloading) if

$$G(\varepsilon_{ij}, T) = 0 \quad \text{and} \quad \delta G < 0,$$

or

$$G(\varepsilon_{ij}, T) < 0, \tag{19}$$

Loading implies that the body is moving from a state of locking to another state of locking, and unloading implies that the body is moving either from a locked state to an elastic state or from an elastic state to another elastic state.

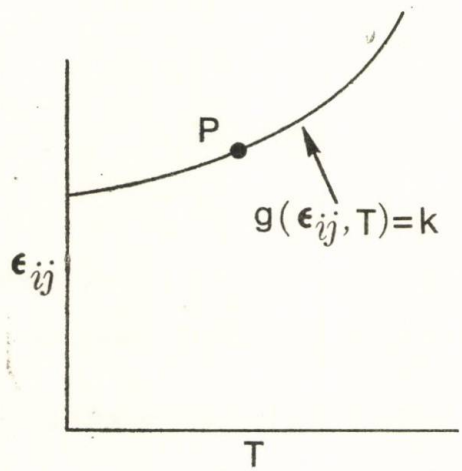


Figure 6 — Geometrical presentation of locking criterion.

c. Derivation of Constitutive Equations

On the basis of the locking condition, that is, since $G(\varepsilon_{ij}, T) = 0$ we can write the following relation which holds when locking occurs

$$\delta G = \frac{\partial G}{\partial \varepsilon_{ij}} \delta \varepsilon_{ij} + \frac{\partial G}{\partial T} \delta T = 0 \tag{20}$$

If we introduce a Lagrangian multiplier λ into (20), then we can write

$$\lambda \frac{\partial G}{\partial \varepsilon_{ij}} \delta \varepsilon_{ij} + \lambda \frac{\partial G}{\partial T} \delta T = 0 \tag{21}$$

Now, using equations (14), (16) and (21), we obtain

$$\left(\frac{\partial H}{\partial \varepsilon_{ij}} + \lambda \frac{\partial G}{\partial \varepsilon_{ij}} - \sigma_{ij} \right) \delta \varepsilon_{ij} + \left(\frac{\partial H}{\partial T} + \lambda \frac{\partial G}{\partial T} + S \right) \partial T = 0 \tag{22}$$

We observe that $\delta \varepsilon_{ij}$ and δT are independent; that is, one variable may be varied independently of the other; therefore

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= \frac{\partial H}{\partial \varepsilon_{ij}} + \frac{\partial G}{\partial \varepsilon_{ij}} = \sigma_{ij}^{(1)} + \sigma_{ij}^{(2)} \\ S &= -\frac{\partial H}{\partial T} - \lambda \frac{\partial G}{\partial T} = S^{(1)} + S^{(2)} \end{aligned} \tag{23}$$

Here the superscript (1) refers to elastic behavior, and superscript (2) refers to material locking; that is

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}^{(1)} &= \frac{\partial H}{\partial \varepsilon_{ij}} \\ \sigma_{ij}^{(2)} &= \lambda \frac{\partial G}{\partial \varepsilon_{ij}} \end{aligned} \tag{24a}$$

$$\begin{aligned} S^{(1)} &= -\frac{\partial H}{\partial T} \\ S^{(2)} &= -\lambda \frac{\partial G}{\partial T} \end{aligned} \tag{24b}$$

For $G < 0$, locking does not occur, $\lambda = 0$, and we recover the results of classical elasticity theory.

We now examine a specific example, using the preceding results.

II. THERMOELASTIC LOCKING OF A THICK-WALLED SPHERE

Let us consider the problem of a thick-walled sphere, as shown in Fig. 7, subjected to a radial thermal gradient through the wall thickness. We assume

that infinitesimal strains occur, and, further, that the material is volumetrically locked while remaining elastic during distortional deformation.

Further, we consider the case of steady state heat transfer, denoting the inner surface temperature by T_i and taking the outer temperature as

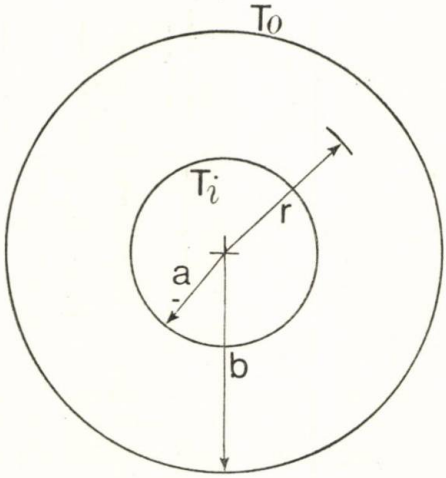


Figure 7 — Spherical shell geometry and temperature profile.

zero. The solution to this heat conduction problem, as a function of the radius r, is given in [10] by

$$T = \frac{T_i}{\left(\frac{b}{a} - 1\right)} \left(\frac{b}{r} - 1\right) \tag{25}$$

a. **Elastic Solution**

In order to find the required thermal locking solution, we first examine the elastic solution. The thermoelastic stress components and radial displacement, as given in [10], are written as

Stresses

$$\begin{aligned} \sigma_r &= -\frac{2\alpha E}{1-\nu}\frac{1}{r_3}\int_a^r T(r)\, r^2\, dr + \frac{EC_3}{1-2\nu} - \frac{2EC_4}{1+\nu}\frac{1}{r^3} \\ \sigma_\theta &= \frac{\alpha E}{1-\nu}\frac{1}{r^3}\int_a^r T(r)\, r^2\, dr + \frac{EC^3}{1-2\nu} + \frac{EC_4}{1+\nu}\frac{1}{r^3} - \frac{\alpha E T}{1-\nu} \end{aligned} \tag{26}$$

Displacement

$$u = \frac{1+\nu}{1-\nu}\alpha\frac{1}{r^2}\int_a^r T(r)\, r^2\, dr + C_3 r + \frac{C_4}{r^2}$$

The boundary conditions to be satisfied require vanishing of the radial stress σ_r at the boundaries $r = a$, b. Substituting the steady state temperature profile into equations (26) and using the boundary conditions on σ_r, we obtain the constants C_3 and C_4.

$$C_3 = \frac{1-2\nu}{1-\nu} \frac{\alpha T_i}{\left(\frac{b}{a}-1\right)} \left[\frac{\left(1-\frac{a^2}{b^2}\right)}{\left(1-\frac{a^3}{b^3}\right)} - \frac{2}{3} \right]$$

$$C_4 = \frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{\alpha T_i}{\left(\frac{b}{a}-1\right)} \cdot a_3 \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{\left(1-\frac{a^2}{b^2}\right)}{\left(1-\frac{a^3}{b^3}\right)} - \frac{1}{3} \right] \tag{27}$$

b. **Locking Solution**

In order to solve the thermal locking problem, we recall that the material is considered to be volumetrically locked and distortionally elastic. It now remains to select the locking function for the system. In the present small strain example, the locking function g is not considered to be an explicit function of temperature. Thus, we can write

$$g = \varepsilon_r + 2\varepsilon_\theta = \mathrm{k} \tag{28}$$

and substituting for $\varepsilon_r, \varepsilon_\theta$, we obtain the locking condition, assuming $k =$ constant, as

$$\frac{1+\nu}{1-\nu}\Bigg) \frac{\alpha T_i}{\left(\frac{b}{a}-1\right)} \left[\frac{b}{r} - 3\frac{(1-\nu)}{(1+\nu)} + \frac{1-2\nu}{1+\nu} \frac{\left(1-\frac{a^2}{b^2}\right)}{\left(1-\frac{a^3}{b^3}\right)} \right] = k \tag{29}$$

Examining equation (29), we note that physically since $k > 0$, T_i and k have the same sign; thus, the maximum value of the above equation occurs for $r = a$. If the temperature T_i is increased, then the locking zone spreads radially outward; however, unlike an elastic-plastic system subjected to thermal loading, a secondary locking zone does not occur elsewhere in the outer elastic shell. This result is discussed in Appendix *I*. However, it is possible for multiple and varied locking zones to occur if the locking parameter k and the other mechanical properties are functions of the temperature T. For example, depending upon the particular functional relationship for $k = k[T(r)] = k(r)$, locking could start from the inner surface, outer surface, or at some intermediate zone. This result would not be unlike that occurring for an elastic-plastic nonhomogeneous body as described in [12].

Since from (28) locking starts at the inner surface, the stresses in the respective locked and elastic regions must be determined. In order to do this

we use the results given for the elastic stresses by expression (26) and determine the stresses in the locked region from the volumetric locking condition expressed by $e_m = k_m$ where $k_m = k/3$. Using the above result in conjunction with the straindisplacement relations given below, that is

$$\varepsilon_r = \frac{du}{dr}, \quad \varepsilon_\theta = \varepsilon_\varphi = \frac{u}{r} \tag{30}$$

we find the displacement function given by

$$u = \frac{C_1}{r^2} + k_m r \tag{31}$$

where C_1 is an arbitrary constant. Since the material is distortionally elastic in the locked region, we can use the following constitutive relations:

$$\begin{aligned} \sigma_r - \sigma_\theta &= 2G(\varepsilon_r - \varepsilon_\theta) \\ \sigma_r - \sigma_\varphi &= 2G\,(\varepsilon_r - \varepsilon_\varphi) \end{aligned} \tag{32}$$

Furthermore, since equilibrium in the radial direction must be satisfied, we can write

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{2}{r}(\sigma_r - \sigma_\theta) = 0 \tag{33}$$

Substituting (31) and (32), using equation (30), we obtain

$$\begin{aligned} \sigma_r &= C_2 - 4G\,\frac{C_1}{r^2} \\ \sigma_\theta = \sigma_\varphi &= C_2 + 2G\,\frac{C_1}{r^2} \end{aligned} \tag{34}$$

To find the unknown constants C_1, C_2, C_1, C_4, we satisfy the following boundary conditions:

$$\begin{aligned} \sigma_r^{(l)}\big|_{r=a} &= 0 \\ \sigma_r^{(e)}\big|_{r=t} &= \sigma_r^{(e)}\big|_{r=t} \\ u_r^{(l)}\big|_{r=t} &= u_r^{(e)}\big|_{r=t} \\ \sigma_r^{(e)}\big|_{r=b} &= 0 \end{aligned} \tag{35}$$

$$\frac{C_1}{k_m} = \left[\frac{2\left[\frac{t^3}{a^3} - 1\right] + \frac{\frac{\alpha T_i}{k_m}}{\left(\frac{b}{a} - 1\right)}\left(\frac{1+\nu}{1-\nu}\right)\left[\left(\frac{b^3}{a^3} - \frac{bt^2}{a^3}\right) + \frac{2}{3}\left(\frac{t^3}{a^3} - \frac{b^3}{a^3}\right)\right]}{\left[\frac{b^3}{a^3}\left(\frac{1+\nu}{1-2\nu}\right) - 3\left(\frac{1-\nu}{1-2\nu}\right) + \frac{2t^3}{a^3}\right]}\right]\left[\frac{3}{2}\left(\frac{1-\nu}{1-2\nu}\right)a^3\right] - a^3$$

$$\frac{C_2}{k_m}=\left[\frac{2\left[\frac{t^3}{a^3}-1\right]+\frac{\frac{\alpha T_i}{k_m}}{\left(\frac{b}{a}-1\right)}\left(\frac{1+\nu}{1-\nu}\right)\left[\left(\frac{b^3}{a^3}-\frac{bt^2}{a^3}\right)+\frac{2}{3}\left(\frac{t^2}{a^3}-\frac{b^3}{a^3}\right)\right]}{\left[\frac{b^3}{a^3}\left(\frac{1+\nu}{1-2\nu}\right)-3\left(\frac{1-\nu}{1-2\nu}\right)+\frac{2t^3}{a^3}\right]}\right]\left[\frac{3(1-\nu)E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\right]-\left[\frac{2E}{1+\nu}\right]$$

$$\frac{C_3}{k_m}=\frac{2\left[\frac{t^3}{a^3}-1\right]+\frac{\frac{\alpha T_i}{k_m}}{\left(\frac{b}{a}-1\right)}\left(\frac{1+\nu}{1-\nu}\right)\left[\left(\frac{b^3}{a^3}-\frac{bt^2}{a^3}\right)+\frac{2}{3}\left(\frac{t^3}{a^3}-\frac{b^3}{a^3}\right)\right]}{\left[\frac{b^3}{a^3}\left(\frac{1+\nu}{1-2\nu}\right)-3\left(\frac{1-\nu}{1-2\nu}\right)+\frac{2t^3}{a^3}\right]}$$

$$\frac{C_4}{k_m}=\left[\frac{2\left[\frac{t^3}{a^3}-1\right]+\frac{\frac{\alpha T_i}{k_m}}{\left(\frac{b}{a}-1\right)}\left(\frac{1+\nu}{1-\nu}\right)\left[\left(\frac{b^3}{a^3}-\frac{bt^2}{a^3}\right)+\frac{2}{3}\left(\frac{t^3}{a^3}-\frac{b^3}{a^3}\right)\right]}{\left[\frac{b^3}{a^3}\left(\frac{1+\nu}{1-2\nu}\right)-3\left(\frac{1-\nu}{1-2\nu}\right)+\frac{2t^3}{a^3}\right]}\right]\left[\frac{3}{2}\left(\frac{1-\nu}{1-2\nu}\right)a^3-t^3\right]+$$

$$+\left[t^3-a^3\right] \tag{36}$$

In addition to the constants above, it is necessary to establish the relation between the limits of the locking boundary and the temperature T. This is accomplished by reverting back to equation (28) at $r = t$. Substituting the given elastic strains from [10] and using the constant above, we find

$$\frac{\alpha T_i}{k_m}=\frac{3\left(\frac{1-\nu}{1-2\nu}\right)\left(\frac{b}{a}-1\right)\left(\frac{b^3}{a^3}-1\right)}{\left[\frac{b^3}{a^3}\left(\frac{1+\nu}{1-2\nu}\right)\left(\frac{b}{t}-1\right)-3\left(\frac{1-\nu}{1-2\nu}\right)\left(\frac{b}{t}-1\right)+\frac{b^3}{a^3}-\frac{bt^2}{a^3}\right]} \tag{37}$$

Substituting the above results into equations (26) and (34), the stresess are given by

Locked Region $[a < r < t]$

$$\frac{\sigma_r}{Ek_m}=\left[\frac{2\left[\frac{t^3}{a^3}-1\right]+\frac{\frac{\alpha T_i}{k_m}}{(b/a-1)}\left(\frac{1+\nu}{1-\nu}\right)\left[\left(\frac{b^3}{a^3}-\frac{bt^2}{a^3}\right)+\frac{2}{3}\left(\frac{t^3}{a^3}-\frac{b^3}{a_3}\right)\right]}{\left[\frac{b^3}{a^3}\left(\frac{1+\nu}{1-2\nu}\right)-3\left(\frac{1-\nu}{1-2\nu}\right)+\frac{2t^3}{a^3}\right]}\right].$$

$$\cdot\left[\frac{3(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left(1-\frac{a^3}{r^3}\right)\right]-\left(\frac{2}{1+\nu}\right)\left[1-\frac{a^3}{r^3}\right]$$

$$\frac{\sigma_\theta}{Ek_m} = \left[\frac{2\left[\frac{t^3}{a^3} - 1\right] + \frac{\frac{\alpha T_i}{k_m}}{\left(\frac{b}{a} 1 -\right)} \left(\frac{1+\nu}{1-\nu}\right)\left[\left(\frac{b^3}{a^3} - \frac{bt^2}{a^3}\right) + \frac{2}{3}\left(\frac{t^3}{a^3} - \frac{b^3}{a^3}\right)\right]}{\left[\frac{b^3}{a^3}\left(\frac{1+\nu}{1-2\nu}\right) - 3\left(\frac{1-\nu}{1-2\nu}\right) + \frac{2t^3}{a^3}\right]} \right] \times$$

$$\times \left[\frac{3(1-\nu)}{2(1+\nu)(1-2\nu)}\left(2 + \frac{a^3}{r^3}\right)\right] - \left(\frac{1}{1+\nu}\right)\left[2 + \frac{a^3}{r^3}\right] \tag{38}$$

Elastic Region $[t < r < b]$

$$\frac{\sigma_r}{EK_m} = \left(\frac{1}{1-\nu}\right) \frac{\frac{\alpha T_i}{k_m}}{\left(\frac{b}{a} - 1\right)} \frac{b}{r}\left[\left(\frac{b^2}{r^2} - 1\right) + \frac{2}{3}\left(1 - \frac{b^3}{r^3}\right)\right] +$$

$$+ \left(\frac{1}{1-2\nu}\right)\left[1 - \frac{b^3}{r^3}\right] \left[\frac{2\left[\frac{t^3}{a^3} - 1\right] + \frac{\frac{\alpha T_i}{k_m}}{\left(\frac{b}{a} - 1\right)} \left(\frac{1+\nu}{1-\nu}\right)\left[\left(\frac{b^3}{a^3} - \frac{bt^2}{a^3}\right) + \frac{2}{3}\left(\frac{t^3}{a^3} - \frac{b^3}{a^3}\right)\right]}{\left[\frac{b^3}{a^3}\left(\frac{1+\nu}{1-2\nu}\right) - 3\left(\frac{1-\nu}{1-2\nu}\right) + \frac{2t^3}{a^3}\right]} \right]$$

$$\frac{\sigma_\theta}{EK_m} = \left(\frac{1}{1-\nu}\right) \frac{\frac{\alpha T_i}{k_m}}{\left(\frac{b}{a} - 1\right)} = \left[-\frac{b}{2r}\left(1 + \frac{b^2}{r^2}\right) + \frac{1}{3}\left(2 + \frac{b^3}{r^3}\right)\right] +$$

$$+ \left(\frac{1}{1-2\nu}\right)\left[1 + \frac{b^3}{2r^3}\right] \left[\frac{2\left[\frac{t^3}{a^3} - 1\right] + \frac{\frac{\alpha T_i}{k_m}}{\left(\frac{b}{a} - 1\right)} \left(\frac{1+\nu}{1-\nu}\right)\left[\left(\frac{b^3}{a^3} - \frac{bt^2}{a^3}\right) + \frac{2}{3}\left(\frac{t^3}{a^3} - \frac{b^3}{a^3}\right)\right]}{\left[\frac{b^3}{a^3}\left(\frac{1+\nu}{1-2\nu}\right) - 3\left(\frac{1+\nu}{1-2\nu}\right) + \frac{2t^3}{a^3}\right]} \right] \tag{39}$$

c. Numerical Results

Data have been obtained for several cases of interest and are shown in Figures 8—10. In Figure 8 the influence of varying Poissons ratio is examined for a sphere of fixed geometry. It is observed that as ν decreases, the

temperature difference required to force locking is increased. Also, it is relatively easy to lock half of the sphere; however, beyond $t/a = 2$ the temperature difference required to produce locking increases rapidly. A case of particular interest occurs when $\nu = 1/2$. In this instance the locking parameter k equals zero and T_i is identically zero. Therefore, for an incompressible material, the sphere is automatically locked for any temperature difference.

In Figure 9 we examine the temperature difference required to produce locking in spheres of constant Poisson ratio ($\nu = \cdot 33$) and several wall thicknesses. It is observed that for t/a values less than $1/2$, the temperature difference required to produce locking for the various geometries is approximately the same. However, for larger values of t/a this difference increases rapidly. Also, the temperature difference required to lock the entire sphere is seen to increase sharply with increasing b/a.

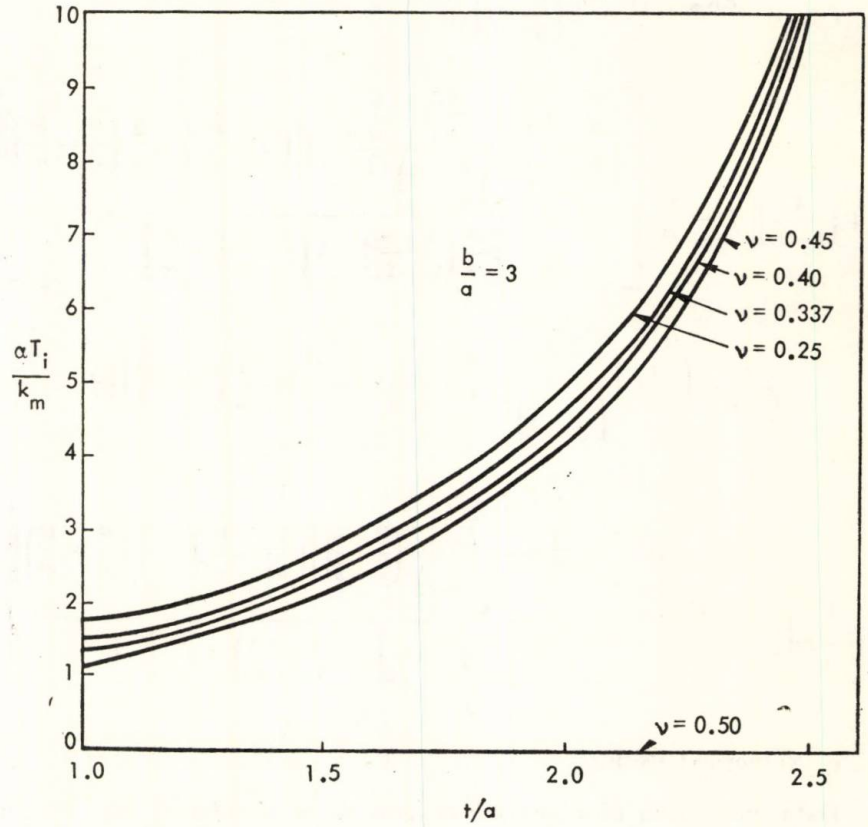


Figure 8 — Influence of Poisson's ratio on locking boundary of spherical shell of fixed geometry.

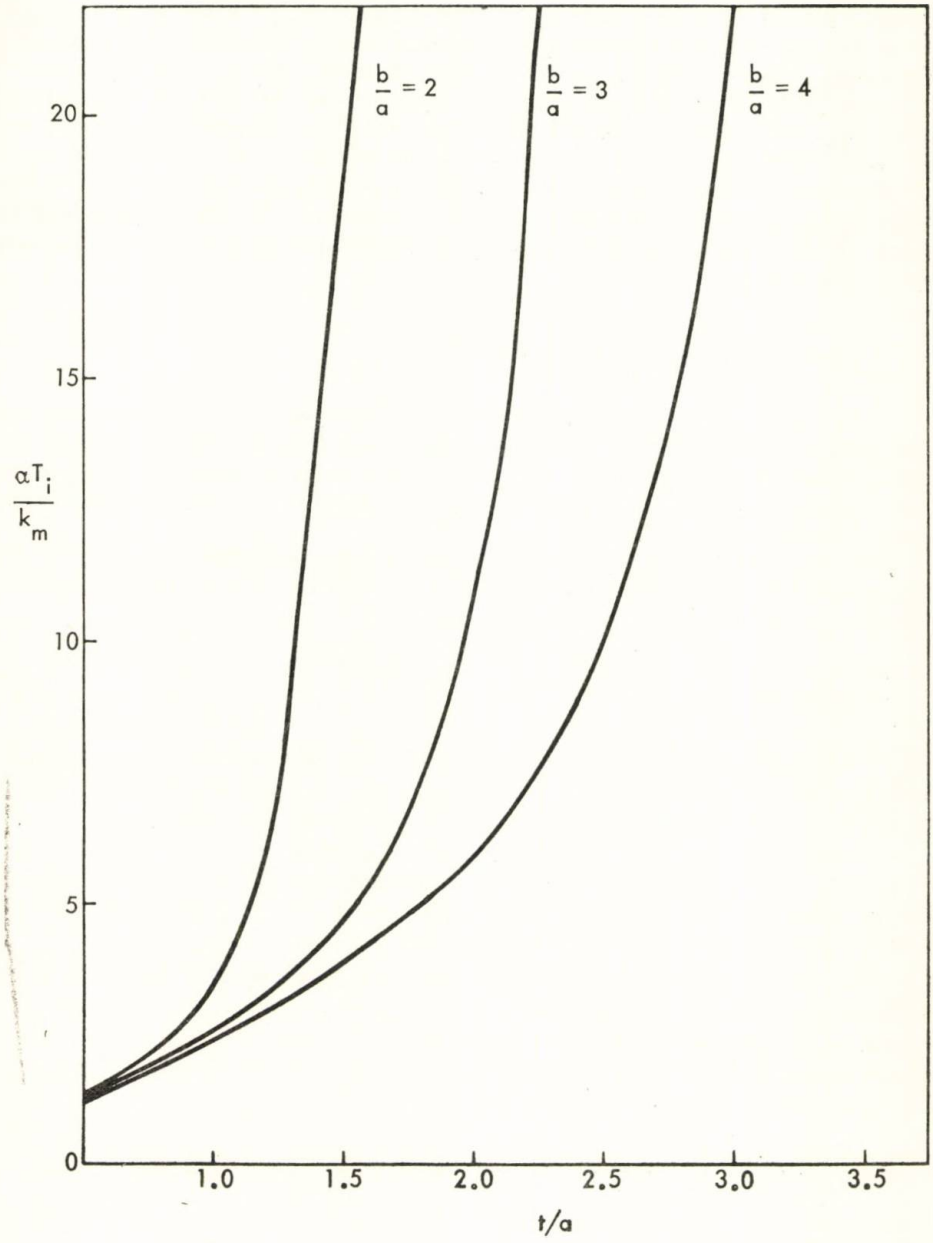


Figure 9 — Temperature influence required to produce locking of spherical shell of varying geometry, fixed Poisson's ratio.

In Figure 10, plots of the stress components are shown for a fixed locking boundary and sphere geometry with Poisson's ratio as a parameter. It is of some interest to compare the present results with those obtained for the elastic-plastic solution in [12]. In particular, the σ_θ, σ_φ stresses for the locking material are discontinuous in slope across the locking boundary but are compatible in stress magnitude at this interface. This result and the order of magnitudes of the σ_r, $\sigma_{\theta,\varphi}$ components are similar to those obtained in [12]. Unlike the thermal elastic-plastic problem, however, the maximum magnitude of the $\sigma_{\theta,\varphi}$ stress occurs at the outer boundary for the locking material, while the maximum stress for the elastic-plastic problem occurs at the boundary interface.

Concluding Remarks

In the present paper the constitutive equations for a locking material, including thermal effects, have been developed from thermodynamical principles assuming small strains. Specific results are presented for the temperature difference required to produce locking in spheres of varying wall thickness and mechanical properties.

Some specific results observed are: (a) the influence of ν on σ_r, $\sigma_{\theta,\varphi}$ stresses is negligible, (*b*) σ_r reac hesa maximum at $r = t(c)\sigma_r$ is less than $\sigma_{\theta,\varphi}$ for all r, and (d) σ_θ reaches a maximum at $r = b$.

Appendix I

The following analysis is presented in order to establish that a secondary locking region does not develop for temperature increases beyond that required to produce initial locking at the inner boundary of the sphere.

Recall that for the locking region to progress outward from the inner boundary, the temperature must be increased, therefore the problem is different from the one originally posed. Also, in the original problem, the inner boundary $r = a$ is free from stress, Figure 11*a*.

We now consider the following alternate problem of a fictitious sphere with inner radius $r = t$ and outer radius $r = b$, Figure 11b. At the inner radius of the sphere a uniform radial stress is applied, the value of which is found from the solution of the locked region at $r = t$. The boundary conditions for this fictitious problem are given by,

$$\begin{aligned} r &= t & \sigma_r &= -p & (p > 0) \\ r &= b & \sigma_r &= 0 \end{aligned} \tag{40}$$

This solution to this problem is given in terms of the previously defined constants C_3, C_4 as.

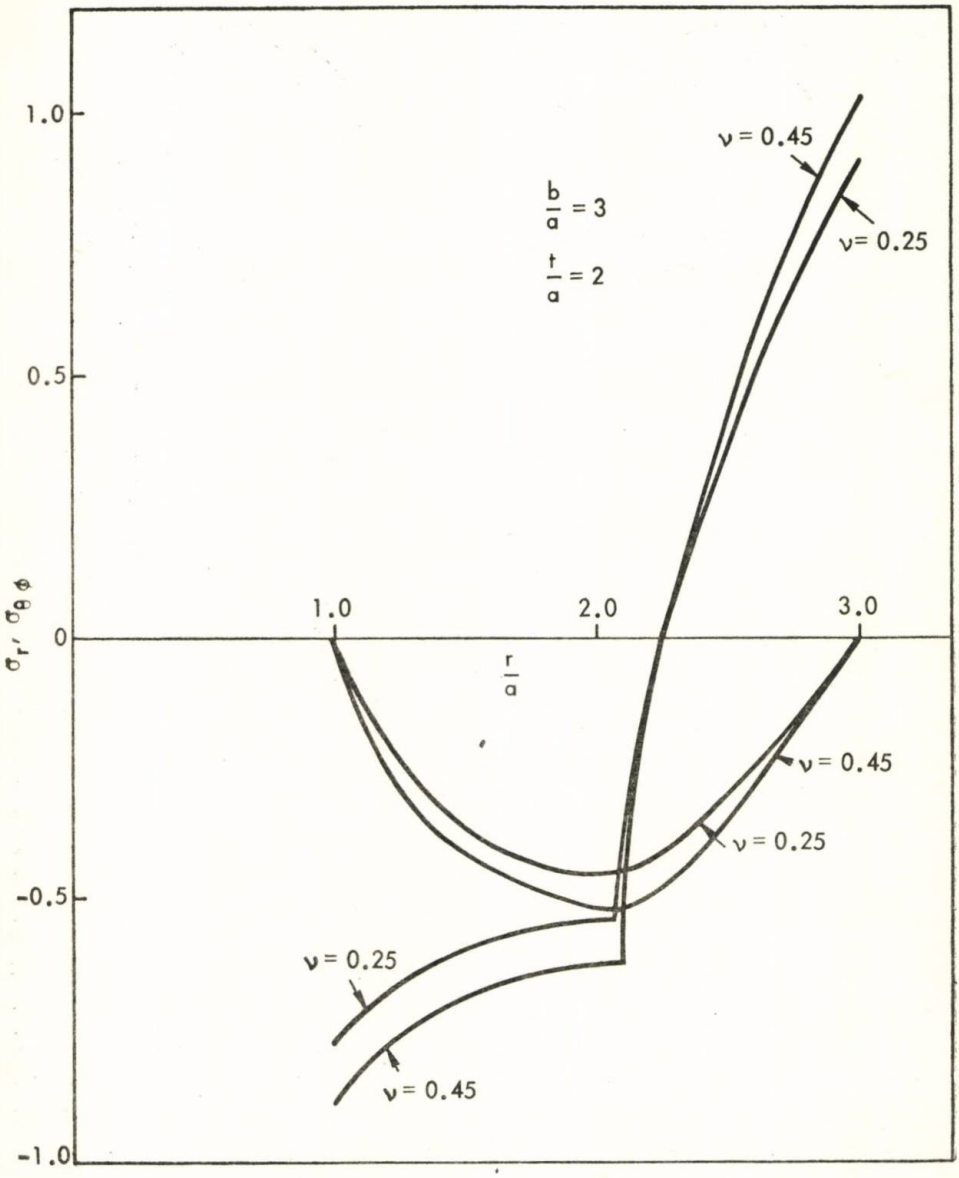


Figure 10 — Stress profile in sphere with varying Poisson's ratio and fixed geometry.

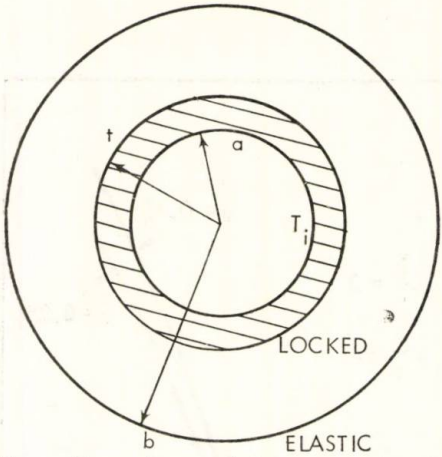


Figure 11 a — Geometrical representation of partially locked spherical shell.

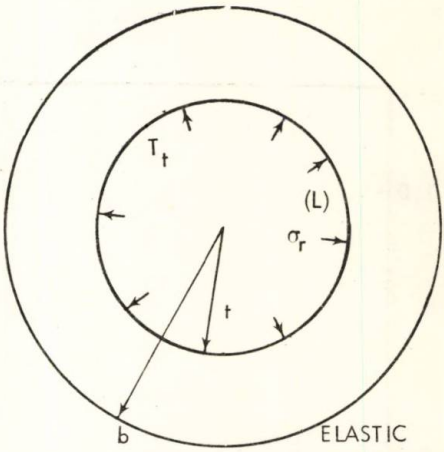


Figure 11 b — Equivalent loading and geometry of elastic-locked spherical shell.

$$C_3 = \frac{1-2\nu}{1-\nu}\,\frac{\alpha T_i}{\left(\frac{b}{a}-1\right)}\left[\frac{1-\frac{a^2}{b^2}}{1-\frac{a^3}{b^3}}-\frac{2}{3}\right]+\frac{p/E}{\frac{b^3}{a^3}-1}$$

$$C_4 = \frac{1+\nu}{1-\nu}\,\frac{\alpha T_i}{\frac{b}{a}-1}\,a^3\left[\frac{1}{2}\,\frac{1-\frac{a^2}{b^2}}{1-\frac{a^3}{b^3}}-\frac{1}{3}\right]+\frac{1+\nu}{1+2\nu}\,\frac{a^3b^3}{b^3-a^3}\,\frac{p}{2E} \tag{41}$$

The displacement u is then given by,

$$u = \frac{1+\nu}{1-\nu}\,\frac{\alpha T_j}{\left(\frac{b}{a}-1\right)}\left[\frac{1}{2}\,b\left(1-\frac{a^2}{r^2}\right)-\frac{1}{3}\left(r-\frac{a^3}{r^3}\right)\right]+C_3 r+\frac{C_4}{r^2} \tag{42}$$

Substituting (42) into the locking criterion (28) gives,

$$\frac{1+\nu}{1-\nu}\,\frac{\alpha T_i}{\left(\frac{b}{a}-1\right)}\left[\frac{b}{r}-3\,\frac{1-\nu}{1+\nu}+3\,\frac{1-2\nu}{1+\nu}\,\frac{1-\frac{a^2}{b^2}}{1-\frac{a^3}{b^3}}\right]+\frac{3p}{E}\,\frac{1}{\left(\frac{b^3}{a^3}-1\right)}=k \tag{43}$$

It is observed that eq. (43) is not a function of r and, since $p>0$, the maximum value of the locking criterion remains at $r = a$.

The above result differs from that occuring for the thermal elastic-plastic problem described in [11]. The reason for this is simply that for the specific form of the locking criterion used, the term involving C_4/r^2 cancels identically, while for the yield criterion of [11] this functional form remains.

[1] Prager, W., *Trans. of the Soc. of Rheol.*, 1, 169 (1957).

[2] Prager, W., *Proc. of the 9th Int. Congress of Appl. Mech.*, Brussels, Belgium, p. 205 (1957).

[2] Phillips, A., *Trans. of the Soc. of Rheol.*, 3, 111 (1959).

[4] Sun, C. T., *Ph. D. Dissertation*, Yale University (1964).

[5] Cristescu, N., *Dynamic Plasticity*, North-Holland Pub. Co. (1967).

[6] Flügge, W., and Sathyanarayana, H. V., *A Contribution to the Theory of Isotropic Locking*, Technical Rep. SUDAER, No. 152, Stanford University (1963).

[7] Zemansky, M. W., *Heat and Thermodynamics*, McGraw Hill (1957).

[8] Hill, R., *The Mathematical Theory of Plasticity*, Oxford University Press (1950).

[9] Treloar, L. R. G., *The Physics of Rubber Elasticity*, Second Edition, Clarendon Press, Oxford, England (1958).

[10] Timoshenko, S., and Goodier, J. N., *Theory of Elasticity, 2nd Edn.*, McGraw Hill (1951).

[11] Johnson, W., and Mellor, P. B., *Int. J. of Mech. Sci.*, 4, 147 (1962).

[12] Olszak. W. in *Nonhomogeneity in Elasticity and Plasticity*, edited by W. Olszak, Pergamon Press, (1959).

RECEIVED ON NOVEMBER 10 1971

IOWA STATE UNIVERSITY
UNIVERSITY OF FLORIDA
UNIVERSITY OF BUCHAREST

QUELQUES CONSIDÉRATIONS SUR LE PROBLÈME DYNAMIQUE DE L'ESPACE ÉLASTIQUE ET SUR L'UTILISATION DE SA SOLUTION

P. P. TEODORESCU

1. Tant en élastodynamique tridimensionnelle qu'en tout autre chapitre de la mécanique, le rôle de la solution fondamentale dans le sens de la théorie des distributions est essentiel; c'est vrai que ce rôle a été mis en évidence surtout le dernier temps, en utilisant le grand developpement de ce chapitre de l'analyse fonctionelle. À l'aide du produit de convolution, la solution fondamentale nous donne ainsi la solution pour tout autre problème (cas de chargement).

On va considérer la solution fondamentale du problème dynamique de l'espace élastique (corps homogène, isotrope, linéairement élastique, soumis à des petites déformations et rotations); d'ailleurs, cette solution peut servir aussi tant pour les domaines qui ont au moins une partie de la frontière à distance finie, que pour toute condition initiale.

Sous une forme initiale, dans le cas des fonctions usuelles, la solution a été donnée par G. G. Stokes [3]; en distributions, elle a été exprimée par W. Kecs [1] et — sous une autre forme — elle se trouve aussi dans [2]. En utilisant les distributions-potentiel, nous [4] avons donné aussi une démonstration de cette solution, ainsi que quelques applications.

2. Soit u_i les déplacements, déterminés par les forces volumiques $F_i (i = 1, 2, 3)$, avec des conditions initiales $(t = 0)$ homogènes (nulles). On va introduire les fonctions

$$\bar{u}_i(x_1, x_2, x_3;\ t) = \begin{cases} 0 & (t < 0), \\ u_i(x_1, x_2, x_3;\ t) & (t \geqslant 0), \end{cases} \tag{1}$$

$$\bar{F}_i(x_1, x_2, x_3;\ t) = \begin{cases} 0 & (t < 0), \\ F_i(x_1, x_2, x_3;\ t) & (t > 0), \end{cases} \tag{2}$$

et les distributions régulières correspondantes.

La solution du problème élastodynamique considérée sera donné par [2]

$$\bar{u}_i = \frac{1}{4\pi G}\left\{L^{-1}\left[L[\bar{F}_i] * \frac{1}{R}\, e^{-p\frac{R}{c_2}}\right] + \right.$$
$$\left. + c_2^2\, L^{-1}\left[L[\bar{F}_j] * \frac{1}{p^2}\left[\frac{1}{R}\,\left(e^{-p\frac{R}{c_1}} - e^{-p\frac{R}{c_2}}\right)\right]_{,\,ij}\right]\right\}, \tag{3}$$

où L, L^{-1} est le symbole de la transformation de Laplace par rapport au temps, respectivement de la transformation inverse, p est la variable complexe dans l'espace correspondant, le signe „$*$" représente le produit de convolution, c_1, c_2 sont les vitesses de propagation des ondes longitudinales, respectivement transversales, les indices après la virgule signifient la dérivation par rapport aux variables correspondantes, R est le rayon

$$R = \sqrt{x_i x_i} \tag{4}$$

et G est le module d'élasticité transversale.

L'état de déplacement sera alors exprimé par

$$u_i = \bar{u}_i \theta(t) \tag{5}$$

où $\theta(t)$ est la distribution de Heaviside.

3. Pour trouver la solution fondamentale proprement dite, l'on fait

$$F_i(x_1, x_2, x_3; t) = P(t)\, \delta(x_1, x_2, x_3) \cos \beta_i \quad (i = 1, 2, 3) \tag{6}$$

et l'on introduit la distribution définie par la fonction

$$\bar{P}(t) = \begin{cases} 0 & (t < 0), \\ P(t) & (t \geqslant 0), \end{cases} \tag{7}$$

En tenant compte de la propriété

$$\delta * h = h, \tag{8}$$

où $\delta(x_1, x_2, x_3)$ est la distribution de Dirac et $h = h(x_1, x_2, x_3)$ est une distribution quelconque, et de la transformation de Laplace

$$L\left[\delta\left(t - \frac{R}{c_k}\right)\right] = e^{-p\frac{R}{c_k}} \quad (k = 1, 2), \tag{9}$$

l'on peut écrire

$$L[\bar{P}(t)\, \delta(x_1, x_2, x_3) \cos \beta_i] * \frac{1}{R} e^{-p\frac{R}{c_2}} = \frac{\cos \beta_i}{R} L[\bar{P}(t)]\, L\left[\delta\left(t - \frac{R}{c_k}\right)\right]. \tag{a}$$

En observant encore que pour le produit de convolution par rapport au temps l'on a

$$L[f(t)]\, L[g(t)] = L[f(t) \underset{(t)}{*} g(t)] \tag{10}$$

où $f(t)$, $g(t)$ sont des distributions quelconques, et que

$$L^{-1}[L[f(t)] = f(t), \tag{11}$$

l'on arrive à

$$L^{-1}[L[\bar{F}_i] * \frac{1}{R} e^{-p\frac{R}{c_2}}] = \frac{\cos \beta_i}{R} \bar{P}(t) \underset{(t)}{*} \delta\left(t - \frac{R}{c_2}\right) = \frac{\cos \beta_i}{R} \bar{P}\left(t - \frac{R}{c^2}\right) \tag{a'}$$

en tenant compte aussi de la propriété de translation

$$\delta(t-a) \underset{(t)}{*} f(t) = f(t-a) \qquad (a = \text{const}). \tag{12}$$

Pour la dérivée d'une distribution par rapport au temps l'on peut écrire la transformation de Laplace

$$L[\dot{f}(t)] = p\, L[f(t)]; \tag{13}$$

c'est ainsi qu'en partant de (9) on arrive à

$$L\left[\left(t-\frac{R}{c_k}\right)_+\right] = \frac{1}{p^2}\, e^{-p\frac{R}{c_k}} \qquad (k = 1,\ 2), \tag{14}$$

où

$$\left(t-\frac{R}{c_k}\right)_+ = \left(t-\frac{R}{c_k}\right)\theta\left(t-\frac{R}{c_k}\right) \qquad (k = 1,\ 2) \tag{15}$$

est la partie positive de la fonction qui conduit à la distribution régulière considérée.

En suivant le même chemin, on trouve que

$$L^{-1}\left[L[\bar{F}_j] * \frac{1}{p^2}\left[\frac{1}{R}\left(e^{-p\frac{R}{c_1}} - e^{-p\frac{R}{c_2}}\right)\right]_{,ij}\right] =$$

$$= \cos\beta_j \bar{P}(t) \underset{(t)}{*} \left\{\frac{1}{R}\left[\left(t-\frac{R}{c_i}\right)_+ - \left(t-\frac{R}{c_2}\right)_+\right]\right\}_{,ij}, \tag{b}$$

ainsi que l'état de déplacement généralisé, correspondant aux forces volumiques (6), sera donné par

$$\bar{u}_i = \frac{\cos\beta_j}{4\pi G}\left\{\frac{1}{R}\,\bar{P}\left(t-\frac{R}{c_2}\right)\delta_{ij} + \right.$$

$$\left. + c_2^2 \bar{P}(t) \underset{(t)}{*} \left\{\frac{1}{R}\left[\left(t-\frac{R}{c_i}\right)_+ - \left(t-\frac{R}{c_2}\right)_+\right]\right\}_{,ij}\right\}, \tag{16}$$

où δ_{ij} est le tenseur de Kronecker. C'est la solution pour une charge concentrée dans l'origine des axes de coordonées, ayant une intensité $P(t)$ et faisant l'angle β avec les axes de coordonées.

Si cette force se comporte comme un choc au moment initial, l'on pose

$$P(t) = P_0\delta(t) \tag{17}$$

et l'on trouve

$$\bar{u}_i = \frac{P_0\cos\beta_j}{4\pi G}\left\{\frac{1}{R}\,\delta\left(t-\frac{R}{c_2}\right)\delta_{ij} + \right.$$

$$\left. + c_2^2\left\{\frac{1}{R}\left[t-\frac{R}{c_1}\right)_+ - \left(t-\frac{R}{c_2}\right)_+\right]\right\}_{,ij}\right\}; \tag{18}$$

d'ailleurs, pour $P_0 = 1$ c'est la solution fondamentale dans le sens de la théorie des distributions.

4. Un cas particulier intéressant à considérer est celui où les forces volumiques sont données par

$$F_i(x_1, x_2, x_3;\ t) = -\frac{1}{3} D(t)\, \delta_{,i}(x_1, x_2, x_3) \quad (i = 1, 2, 3) \tag{19}$$

et l'on introduit la distribution définie par la fonction

$$\bar{D}(t) = \begin{cases} 0 & (t < 0), \\ D(t) & (t \geqslant 0). \end{cases} \tag{20}$$

Tenant compte de la propriété suivante du produit de convolution

$$(h * l)_{,i} = h_{,i} * l = h * l_{,i}\ , \tag{21}$$

où $h = h\,(x_1, x_2, x_3)$ et $l = l\,(x_1, x_2, x_3)$ sont des distributions, l'on peut écrire

$$L\,[\bar{F}_i] * \frac{1}{R} e^{-p\frac{R}{c_2}} = -\frac{1}{3} L\,[\bar{D}(t)] \left(\frac{1}{R} e^{-p\frac{R}{c_2}}\right)_{,i}\ , \tag{c}$$

$$L\,[\bar{F}_j] * \frac{1}{p^2}\left[\frac{1}{R}(e^{-p\frac{R}{c_1}} - e^{-p\frac{R}{c_2}})\right]_{,ij} =$$

$$= -\frac{1}{3p^2} L\,[\bar{D}(t)]\, \Delta\left[\frac{1}{R}(e^{-p\frac{R}{c_1}} - e^{-p\frac{R}{c_2}})\right]_{,i}\ , \tag{d}$$

en introduisant aussi l'opérateur Δ de Laplace, actionnant sur une distribution $h(x_1, x_2, x_3)$

$$\Delta h = h_{,ii}. \tag{22}$$

En observant que

$$\Delta(hl) = ((hl)_{,i})_{,i} = (h_{,i}\, l + hl_{,i})_{,i} = l\, \Delta h + h\, \Delta\, l + 2h_{,i}\, l_{,i}\ , \tag{23}$$

l'on peut écrire

$$\Delta\left(\frac{1}{R} e^{-p\frac{R}{c_k}}\right) = e^{-p\frac{R}{c_k}} \Delta\left(\frac{1}{R}\right) +$$

$$+ \frac{1}{R}\, \Delta\,(e^{-p\frac{R}{c_k}}) + 2\left(\frac{1}{R}\right)_{,i} (e^{-p\frac{R}{c_k}})_{,i} \quad (k = 1, 2), \tag{e}$$

où

$$\Delta\left(\frac{1}{R}\right) = -\,4\pi\, \delta(x_1, x_2, x_3) \tag{24}$$

et

$$\Delta\,(e^{-p\frac{R}{c_k}}) = \left(\frac{p}{c_k}\right)^2 e^{-p\frac{R}{c_k}} R_{,i}\, R_{,i} - \frac{p}{c_k} e^{-p\frac{R}{c_k}}\, \Delta\, R \quad (k = 1, 2), \tag{f}$$

avec

$$R_{,i} = \frac{x_i}{R} \quad (i = 1,\ 2,\ 3), \tag{25}$$

$$R_{,i} R_{,i} = 1 \tag{25'}$$

et

$$\Delta R = (R_{,i})_{,i} = -\frac{X_i X_i}{R^3} + \frac{3}{R} = \frac{2}{R}. \tag{26}$$

Mais

$$\psi(x_1, x_2, x_3)\ \delta(x_1, x_2, x_3) = \psi(0,\ 0,\ 0)\ \delta(x_1, x_2, x_3), \tag{27}$$

si ψ est une fonction de la classe C^∞, ainsi que

$$(e^{-p\frac{R}{c_1}} - e^{-p\frac{R}{c_2}})\,\Delta\left(\frac{1}{R}\right) = 0, \tag{g}$$

où l'on a tenu compte aussi de (24); on a encore

$$\left(\frac{1}{R}\right)_{,i} (e^{-p\frac{R}{c_k}})_{,i} = -\frac{R_{,i}}{R^2}\left(-\frac{p}{c_k}\right) e^{-p\frac{R}{c_k}} R_{,i} = \frac{1}{R^2}\frac{p}{c_k} e^{-p\frac{R}{c_k}} \quad (k = 1,\ 2). \tag{h}$$

Des formules antérieures il résulte que

$$\Delta\left[\frac{1}{R}(e^{-p\frac{R}{c_1}} - e^{-p\frac{R}{c_2}})\right] = \frac{1}{R}\left[\left(\frac{p}{c_1}\right)^2 e^{-p\frac{R}{c_1}} - \left(\frac{p}{c_2}\right)^2 e^{-p\frac{R}{c_2}}\right]. \tag{i}$$

En revenant aux formules (3), l'on obtient

$$\bar{u}_i = -\frac{1}{12\pi G}\frac{c_1^2}{c_2^2}\left[\frac{1}{R}\bar{D}\left(t - \frac{R}{C_1}\right)\right]_{,i}, \tag{28}$$

où

$$\bar{u}_i = -\frac{1 - 2\nu}{24\pi(1 - \nu)\,G}\left[\frac{1}{R}\bar{D}\left(t - \frac{R}{c_1}\right)\right]_{,i}, \tag{28'}$$

ν étant le coefficient de contraction transversale de Poisson.

C'est la solution pour un centre de dilatation spatiale, concentré dans l'origine des axes de coordonnées.

5. De la même manière, on peut considérer aussi d'autres cas de chargement, en particulier des charges concentrées, en utilisant les représentations données dans [2].

Le but de cet article a été de mettre en évidence la possibilité d'utiliser de telles solutions et de présenter différents détails de calcul, qui- d'ailleurs- apparaîssent aussi dans le cas d'autres singularités.

BIBLIOGRAPHIE

1. W. Kecs : *Les solutions généralisées de l'espace élastique sous l'action de certaines charges variables*, Rev. Roum. Math. Pures et Appl., t. XV, no 7, 1970.
2. W. Kecs, P. P. Teodorescu : *Aplicații ale teoriei distribuțiilor în mecanică*, Edit. Academiei R. S. România, București, 1970.
3. G. G. Stokes : *On the dynamical theory of diffraction*, Trans. of the Cambridge Phil. Soc., t. 9, no. 1, 1849.
4. P. P. Teodorescu : *Stress functions in three-dimensional elastodynamics*, Acta Mechanica, t. 14, 1972.

Reçu le 10 IX 1971

UNIVERSITÉ DE BUCAREST
FACULTÉ DE MATHÉMATIQUE MÉCANIQUE

A METHOD FOR MINIMIZING THE NUMBER OF STATES FOR A RESTRICTED CLASS OF INCOMPLETELY SPECIFIED SEQUENTIAL MACHINES

I. TOMESCU

In this paper a matrix method is given which enables one to determine all pairs of compatible states in the case of incompletely specified sequential automata.

Another result is the reduction of the problem of the minimization of a given machine for a restricted class of incompletely specified sequential machines to the problem of coloring the nodes of the graph of incompatible states with a minimal number of colors.

A new combinational algorithm for the covering problem is presented and computational experiments are analyzed.

1. Basic Definitions

The problem of minimizing the number of internal states in a sequential machine has been discussed extensively in the literature.

In particular the general theory of the covering problem for incompletely specified flow tables has been formulated by Paull and Unger [1]; the results relevant to this discussion will be briefly recalled following Miller's definitions and terminology [2].

Let $\mathfrak{A}(I, Q, W, \delta, \omega)$ be an incompletely specified sequential machine with the transition map δ defined on a subset D_δ of $I \times Q$ into Q and the output map ω defined on a subset D_ω of $I \times Q$ into Q, where Q is a finite set of internal states, I is a finite set of inputs and W is a finite set of outputs.

A sequence $i_1, i_2, \ldots, i_p$ of inputs is said to be applicable to $\mathfrak{A}$ in a state q_1 if there is a sequence of states $q_1, q_2, \ldots, q_p$ such that $(i_j, q_j) \in D_\delta$ for $1 \leqslant j < p$, where $\delta(i_j, q_j) = q_{j+1}$, and such that $(i_q, q_q) \in D_\omega$.

The sequence of states $q_1, q_2, \ldots, q_q$ is called the state sequence produced and the output $\omega(i_p, q_p)$ is called the output produced by $\mathfrak{A}$ in state q_1 under the input sequence $i_1, i_2, \ldots, i_p$.

States p_1 and q_1 of a machine $\mathfrak{A}(I, Q, W, \delta, \omega)$ are incompatible if there exists some input sequence $i_1, i_2, \ldots, i_p$ which is applicable both to $\mathfrak{A}$

in state p_1 and $\mathfrak{A}$ in state q_1 such that the output produced by $\mathfrak{A}$ in p_1 is not equal to the output produced by $\mathfrak{A}$ in q_1 under the input sequence $i_1, i_2, \ldots, i_p$.

States p_1 and q_1 of $\mathfrak{A}$ are compatible if they are not incompatible. We denote this compatibility relation between p_1 and q_1 by $p_1 \sim q_1$.

2. A matrix Algorithm to Find All Incompatible Pairs of States

To obtain all pairs of incompatible states of a sequential machine (completely ot incompletely specified) we need to analyze the chains of implications obtained in the following manner:

If $\delta(i_r, q_i) = q_k$ and $\delta(i_r, q_j) = q_l$, then we deduce $(q_i \sim q_j) \Rightarrow (q_k \sim q_l)$.

This implication represents a tautology only if $i = j$ or $k = l$ or $(i, j) = (k, l)$ where we write (i, j) to mean the unordered pair.

For this implication we obtain $q_i \nsim q_j$ if q_k and q_l are incompatible states.

Two states q_i and q_j are said to be prime incompatible states if there exists an input $i_s \in I$ such that $(i_s, q_i) \in D_\omega$; $(i_s, q_j) \in D_\omega$ and $\omega(i_s\, q_i) \neq \omega(i_s, q_j)$.

For a sequential machine $\mathfrak{A}$ with m states and n inputs we define the matrix

$A_1 = \{a_{ij}^{(1)}\}_{i,j=1,\ldots,m}$ of the prime incompatible states thus: $a_{ij}^{(1)} = 0$ if the states q_i and q_j are prime incompatible states and $a_{ij}^{(1)} = 1$ if q_i and q_j are not prime incompatible.

Let the matrices $C_{(k)} = \{c_{ij}^{(k)}\}_{i,j=1\ldots,m}$ where $1 \leqslant k \leqslant n$ be defined thus:

$c_{ij}^{(k)} = 1$ if $\delta(i_k, q_i) = q_j$ or δ is not defined for the pair (i_k, q_i) and $c_{ij}^{(k)} = 0$ if $(i_k, q_i) \in D_\delta$ and $\delta(i_k, q_i) = q_j$.

We shall define two kinds of products for Boolean matrices $A = \{a_{ij}\}_{i,j=1\ldots,m}$ and $B = \{b_{ij}\}_{i,j=1,\ldots,m}$ in the following manner:

$$A \times B = \left\{ \bigvee_{k=1}^{m} a_{ik}\, b_{kj} \right\}_{i,j=1,\ldots,m} \quad \text{and} \quad AB = \{a_{ij}\, b_{ij}\}_{i,j=1,\ldots,m}.$$

We next consider the following algorithm:

$$A_1^{(1)} = A_1(C_{(1)} \times A_1 \times C_{(1)}^T);$$

$$A_1^{(t+1)} = A_1^{(t)}(C_{(t+1)} \times A_1^{(t)} \times C_{(t+1)}^T) \text{ for } t = 1, \ldots, n-1$$

where T denotes transpose. We denote $A_2 = A_1^{(n)}$ and so on.

When the matrix A_s is obtained, $A_s^{(1)} = A_s(C_{(1)} \times A_s \times C_{(1)}^T)$; $A_s^{(t+1)} = A_s^{(t)}(C_{(t+1)} \times A_s^{(t)} \times C_{(t+1)}^T)$ for $t = 1,\ldots,n-1$ and we shall define $A_{s+1} = A_s^{(n)}$.

For two Boolean matrices A and B we denote their inequality ($a_{ij} \leqslant b_{ij}$ for $i, j \in \{1, 2, \ldots, m\}$) by $A \leqslant B$.

Theorem 1: *For every sequential machine $\mathfrak{A}$ the following relations hold:*

$$A_1 \geqslant A_2 \geqslant \ldots \geqslant A_r = A_{r+1} = \ldots$$

where $r \leqslant \binom{m}{2}$ *and the matrix* A_r *describes all pairs of incompatible states, i, e.* $\{A_r\}_{ij} = 0$ *if and only if* q_i *and* q_j *are incompatible states.*

Proof. Consider the formula $A_s^{(t+1)} = A_s^{(t)}(C_{(t+1)} \times A_s^{(t)} \times C_{(t+1)}^T)$ and suppose that $\{A_s^{(t)}\}_{ij} = 1$ and $\delta(i_{t+1}, q_i) = q_k$; $\delta(i_{t+1}, q_j) = q_l$, therefore the implication $(q_i \sim q_j) \Rightarrow (q_k \sim q_l)$ holds.

We shall obtain $\{A_s^{(t+1)}\}_{ij} = 0$ if $\{A_s^{(t)}\}_{kl} = 0$ and $\{A_s^{(t+1)}\}_{ij} = 1$ if $\{A_s^{(t)}\}_{kl} = 1$. Indeed, $\{A_s^{(t+1)}\}_{ij} = \{A_s^{(t)}\}_{ij}\left(\bigvee_{u,v=1}^{m} \{C_{(t+1)}\}_{iu} \{A_s^{(t)}\}_{uv} \{C_{(t+1)}^T\}_{vj}\right) = \{A_s^{(t)}\}_{kl}$ because $\{A_s^{(t)}\}_{ij} = 1$ and $\{C_{(t+1)}\}_{ik} = 1$; $\{C_{(t+1)}\}_{iu} = 0$ for $u \neq k$; $\{C_{(t+1)}^T\}_{lj} = \{C_{(t+1)}\}_{jl} = 1$ and $\{C_{(t+1)}^T\}_{vj} = \{C_{(t+1)}\}_{jv} = 0$ for $v \neq l$.

If at least one from the states $\delta(i_{t+1}, q_i)$ and $\delta(i_{t+1}, q_j)$ is not defined, then $\{C_{(t+1)}\}_{iu} = 1$ for $1 \leqslant u \leqslant m$ or $\{C_{(t+1)}^T\}_{vj} = 1$ for $1 \leqslant v \leqslant m$ respectively, therefore $\{A_{(t+1)}^s\}_{ij} = \{A_s^{(t)}\}_{ij}$.

Indeed, if for example $(i_{t+1}, q_i) \notin D_\delta$ then $\bigvee_{u,v=1}^{m} \{C_{(t+1)}\}_{iu} \{A_s^{(t)}\}_{uv} \{C_{(t+1)}^T\}_{vj} \geqslant \{C_{(t+1)}\}_{il} \{A_s^{(t)}\}_{ll} \{C_{(t+1)}^T\}_{lj} = 1$ because $\{A_s^{(t)}\}_{ll} = 1$ for every s and for every $1 \leqslant t \leqslant n$. If $\{A_s^{(t)}\}_{ij} = 0$ then $\{A_s^{(t+1)}\}_{ij} = 0$ also.

With this algorithm we effectively analyze all chains of non-tautological implications associated with the transition function δ, whose length (number of implications) is less than or equal to $\binom{m}{2} - 1$ starting from all pairs of prime incompatible states.

If $A_r = A_{r+1}$, then for every input we have no implication of the type $(q_i \sim q_j) \Rightarrow (q_k \sim q_l)$ for which $\{A_r\}_{kl} = 0$ and $\{A_r\}_{ij} = 1$, hence $\{A_r\}_{ij} = 0$ iff the states q_i and q_j are incompatible.

We have also

$$A_s \geqslant A_s^{(1)} \geqslant A_s^{(2)} \geqslant \ldots \geqslant A_s^{(t)} \geqslant A_s^{(t+1)} \geqslant \ldots \geqslant A_s^{(n)} = A_{s+1}$$

for every s. The program written in FORTRAN IV for the computer IBM 360/30 of the Computing Center of the University of Bucharest, which realizes this algorithm, has 74 statements and contains 4 arrays: $M1$ (M, M), $M2$ (M, M), $M3$ (M, M) and MC (N, M, M) where N is the number of inputs and M is the number of states. Working time (including time of compilation) for an example with $N = 4$ and $M = 7$ was 1 minute.

3. Closed Partitions with a Minimal Number of Classes

A compatibility class C_α is a set of internal states $C_\alpha = \{q_{\alpha_1}, q_{\alpha_2}, \ldots, q_{\alpha_r}\}$ such that all members of C_α are pairwise compatible.

A set of compatibility classes is closes under the input $i_j \in I$ if, for every class C_α of the set, the specified internal states among $\delta(i_j, q_{\alpha_1})$, $\delta(i_j, q_{\alpha_2})$

,...,$\delta(i_j, q_{ar})$, are all contained in at least one of the classes of the set. A set of compatibility classes is closed if it is closed under every input $i_j \in I$. A set of compatibility classes covers a flow table if every internal state of the table is contained in at least one class of the set.

Let $\mathfrak{A}(I, Q, W, \delta, \omega)$ and $\mathfrak{A}'(I', Q', W', \delta', \omega')$ be two sequential machines. We say that $\mathfrak{A}'$ in state $q_1' \in Q'$ includes $\mathfrak{A}$ in state $q_1 \in Q$[2] if for every input sequence $i_1, i_2, ..., i_r$ which is applicable to $\mathfrak{A}$ in q_1 the following conditions hold:

1) $i_1, i_2, ..., i_r$ is an input sequence applicable to $\mathfrak{A}'$ in state q_1'.

2) Let $q_1, q_2, ... q_r$ be the state sequence produced by $\mathfrak{A}$ in q_1 and $q_1', q_2', ..., q_r'$ be the state sequence produced by $\mathfrak{A}'$ in q_1' under $i_1, i_2, ..., i_r$; then $\omega'(i_r, q_r') = \omega(i_r, q_r)$.

A machine $\mathfrak{A}'$ is said to include a machine $\mathfrak{A}$ if for every state $q \in Q$ there exists a $q' \in Q'$ such that $\mathfrak{A}'$ in state q' includes $\mathfrak{A}$ în state q. We denote this relation by $\mathfrak{A}' > \mathfrak{A}$. The inclusion relation is reflexive and transitive.

$\mathfrak{A}'$ is called a minimum state machine for $\mathfrak{A}$ if $\mathfrak{A}' > \mathfrak{A}$ and for every machine $\mathfrak{A}'' > \mathfrak{A}$ it follows that $|Q''| \geqslant |Q'|$, that is the number of states of $\mathfrak{A}''$ is greater than or equal to the number of states of $\mathfrak{A}'$.

We denote a minimum state machine for $\mathfrak{A}$ by $\mathfrak{A}_{min}$. The problem of minimizing the number of internal states reduces then [1] to the problem of finding a closed set of compatibility classes which covers a given table and has the minimal number of classes.

A state $q_1 \in Q$ is said to be a state with successors and outputs completely specied under every input if for every input sequence $i_1, i_2, ..., i_r$ there is a sequence of states $q_2, q_3, ..., q_r$ such that $(i_j, q_j) \in D_a$ and $\delta(i_j, q_j) = q_{j+1}$ for every $1 \leqslant j \leqslant r-1$ and $(i_j, q_j) \in D_\omega$ for every $1 \leqslant j \leqslant r$.

The set of states of an incompletely specified machine which has states with successors and outputs completely specified under every input may be partitioned into a complety specified part and an incompletely specified part (figure 1) such that the completely specified part can be entered from the incompletely specified part but no communication is possible in the other direction.

For such class of machines the reduction problem is relatively simple if the hypotheses of Theorem 2 are satisfied.

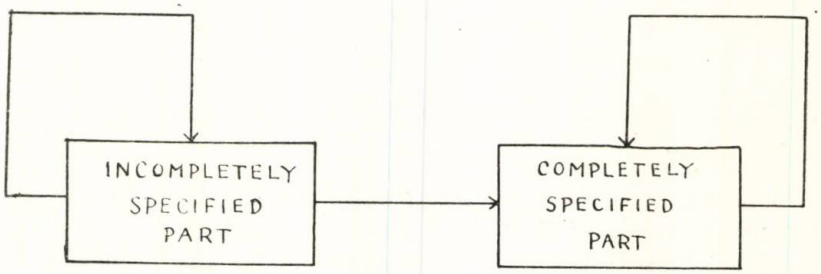


Fig. 1

Theorem 2: *For every incompletely specified sequential machine* $\mathfrak{A}(I, Q, W, \delta_{\mathfrak{A}}, \omega_{\mathfrak{A}})$ *which has a partition*

$$\Delta = \{q_{l_1}, q_{l_2}, \ldots, q_{l_r}\}, \ldots, \{q_{k_1}, q_{k_2}, \ldots, q_{k_s}\}$$

of the set of states Q *with a minimum number of classes such that every pair of states belonging to the same class are compatible, and with the property that every class of* Δ *which is not closed contains at least one state with successors and outputs competely specified under every input, then there exists a machine* $\mathfrak{L}(I, Q, W, \delta_{\mathfrak{L}}, \omega_{\mathfrak{L}})$ *having the properties:*

i) $\mathfrak{L}$ *and* $\mathfrak{A}$ *have the same pairs of compatible states.*

ii) Δ *is a partition of* Q *with a minimal number of compatibility classes which are closed relatively to* $\mathfrak{L}$, *hence* $\mathfrak{L}_{min}$, *the minimal — state machine of* $\mathfrak{L}$ *is obtained from the closed partition* Δ.

iii) $\mathfrak{L}_{min} > \mathfrak{A}$ *and a minimal-state machine of* $\mathfrak{A}$ *is* $\mathfrak{L}_{min}$.

Proof. We shall define a sequence of steps leading to the transition function of $\mathfrak{L}$ such that the partition Δ will be closed for $\mathfrak{L}$.

Let $q_{j_1}, q_{j_2}, \ldots q_{j_t}$ be all states of the set $\{q_{l_1}, q_{l_2}, \ldots q_{l_r}\}$ for which the states $\delta_{\mathfrak{A}}(i_1, q_{j_1}), \delta_{\mathfrak{A}}(i_1, q_{j_2}), \ldots, \delta_{\mathfrak{A}}(i_1, q_{j_t})$ do not belong to the same class of Δ as $\delta_{\mathfrak{A}}(i_1, q_{l_1})$ if we suppose that the state q_{l_1} is a state with successors and outputs completely specified under every input. We define a sequential machine $\mathfrak{L}_1(I, Q, W, \delta_{\mathfrak{L}_1} \omega_{\mathfrak{L}_1})$ such that:

$\omega_{\mathfrak{L}_1} = \omega_{\mathfrak{A}}$; $\delta_{\mathfrak{L}_1}(i_s, q_j) = \delta_{\mathfrak{A}}(i_s, q_j)$ for every $s \neq 1, q_j \in Q$ and $(i_s, q_j) \in D_{\delta\mathfrak{A}}$; $\delta_{\mathfrak{A}_1}(i_1, q_j) = \delta_{\mathfrak{A}}(i_1, q_j)$ for $j \neq j_1, j_2, \ldots, j_t$ and $(i_1, q_j) \in D_{\delta\mathfrak{A}}$; $\delta_{\mathfrak{L}_1}(i_1, q_j) = \delta_{\mathfrak{A}}(i_1, q_{l_1})$ for $j = j_1, j_2, \ldots, j_t$. Clearly $D_{\delta\mathfrak{A}} = D_{\delta\mathfrak{L}_1}$.

$\mathfrak{L}_1$ and $\mathfrak{A}$ have the same pairs of compatible states and the class $\{q_{l_1}, q_{l_2}, \ldots, q_{l_r}\}$ is closed under the input i_1, relatively to the machine $\mathfrak{L}_1$. Indeed $q_{l_1}, q_{j_1}, \ldots, q_{j_t}$ are compatible states, hence $\delta_{\mathfrak{A}}(i_1, q_{l_1}), \delta_{\mathfrak{A}}(i_1, q_{j_1}), \ldots$ $\delta_{\mathfrak{A}}(i_1, q_{j_t})$ are compatible states for $\mathfrak{A}$ and replacing $\delta\mathfrak{A}(i_1, q_{j_1}), \ldots, \delta_{\mathfrak{A}}(i_1, q_{jt})$ by $\delta_{\mathfrak{A}}(i_1, q_{l_1})$ we obtain for $\mathfrak{L}_1$ the same pairs of compatible states because the output map is unchanged and the chains of nontautological implications do not give further pairs of incompatible states relatively to $\mathfrak{L}_1$.

An output word Z of length s is a vector with s positions whose components belong to the set W or are not specified.

We shall define a partial order between Z_1 and Z_2 and we shall write $Z_1 \geqslant Z_2$ if for every specified position $(Z_1)_i$ in Z_1 the relation $(Z_1)_i = (Z_2)_i$ holds.

If an input sequence is applicable to $\mathfrak{A}$ in a state q_j, then this sequence is also applicable to $\mathfrak{L}_1$ in the same state when we obtain output words $Z_{\mathfrak{A}}$ and $Z_{\mathfrak{L}_1}$ such that $Z_{\mathfrak{A}} \geqslant Z_{\mathfrak{L}_1}$.

Indeed, if for an input sequence which is applicable to $\mathfrak{A}$ in a state q_j we have for $\mathfrak{A}$ and $\mathfrak{L}_1$ different outputs under the same input (starting in both cases from q_j), then $\mathfrak{L}_1$ must pass through some states from the set $\{q_{j_1}, q_{j_2}, \ldots, q_{j_t}\}$ for which the transition function is modified under the input i_1.

If we write the chains of implications which characterize this evolution of $\mathfrak{L}_1$ leading to different outputs (relatively to $\mathfrak{A}$), we find that q_{l_1} and a state from the set $\{q_{j_1}, q_{j_2}, \ldots, q_{j_t}\}$ are incompatible states, which contradicts our hypothesis.

This property, implies that $\mathfrak{L}_1$ in the state q_j includes $\mathfrak{A}$ in the same state for every $q_j \in Q$, hence $\mathfrak{L}_1 > \mathfrak{A}$.

By applying this algorithm again for other classes of Δ which are not closed under the input i_1 and relatively to the machine $\mathfrak{L}_1$, and then again for the classes which are not closed under the input $i_2, i_3, \ldots, i_n$ respectively, we obtain a sequence of machines:

$$\mathfrak{A} < \mathfrak{L}_1 < \mathfrak{L}_2 \ldots < \mathfrak{L}$$

where $\mathfrak{L}(I, Q, W, \delta_{\mathfrak{L}}, \omega_{\mathfrak{A}})$ has the same compatible states as $\mathfrak{A}$ and the partition Δ is closed relatively to the transition map $\delta_{\mathfrak{L}}$.

At each step of this procedure a class of Δ which is closed remains closed because Δ is a partition and every state belongs to a single class of Δ.

Clearly $\mathfrak{L}_{min} > \mathfrak{L} > \mathfrak{A}$ and the machine $\mathfrak{L}_{min}$ has the smallest number of states from all machines $\mathfrak{A}' > \mathfrak{A}$ because the states of $\mathfrak{L}_{min}$ are the classes of Δ and Δ is a partition of Q with a minimal number of compatibility classes relatively to $\mathfrak{A}$ q.e.d.

4. Graph Coloring and Minimal Partitions

This section contains two consequences of Theorem 2 which show that, for a subset of the class of incompletely specified sequential machines, the problem of minimizing the number of states is reduced to the problem of coloring the nodes of a certain graph with a minimal number of colors such that two nodes joined by an edge be colored with different colors.

This graph is defined as follows: If the machine $\mathfrak{A}$ has m states, then the graph has m vertices: $x_1, x_2, \ldots, x_m$ the vertices x_r and x_s being joined by an edge iff $q_r \not\sim q_s$. Hence for these classes of machines the condition of closure of the set of compatibility classes is not essential.

Corollary 1: *If every state $q_j \in Q$ is compatible with a state q_r which has the successors and outputs completely specified under every input, then the problem of minimizing the number of states is reduced to the problem of finding a partition of the set of states Q with a minimal number of compatibility classes.*

Indeed, if $C_1, C_2, \ldots, C_l$ is such minimal partition with compatibility classes of the set Q of states, then we may add to each class C_j which is not closed and does not contain a state with outputs and successors completely specified under every input the state q_r and we obtain a new class $C_j \cup \{q_r\}$.

Although the cover obtained is not a partition, we may apply the procedure described above and we find a new machine $\mathfrak{L}$ whose machine $\mathfrak{L}_{min}$ is a minimum-state machine for $\mathfrak{A}$.

Corollary 2: *For every sequential machine $\mathfrak{A}$ which has a partition Δ of the set of states with a minimum number of compatibility classes there exists a machine $\mathfrak{L}$ (which may be found following the procedure given above) whose minimum — state machine $\mathfrak{L}_{min}$ is a minimum — state machine for $\mathfrak{A}$ if all of its optional entries result from exclusions of particular ordered pairs of symbols from allowed input sequences.*

Note that input restrictions are the same for every state and they can include forbidding $i_s i_t$ where $s = t$ as well as where $s \neq t$.

In this case every class of Δ which is not closed contains at least one state with successors and outputs completely specified under every admissible input.

A similar result is obtained by S. Unger [3] when Δ is a minimal covering composed from maximal compatibles: To find a minimal closed covering for a flow table satisfying the restrictions on the input sequence of the form „Input i_1 can never immediately follow input i_2" [4], one can first find the set of all maximal compatibles, and then choose the smallest number of these which contains all states of the table.

The theorem 2 of [3] guarantees that this set will be closed. Obviously this smallest number of maximal compatibles is equal to the chromatic number of the graph whose edges are the pairs of incompatible states.

Note that many types of flow tables with „don't cares" derive from such restrictions.

In the following, an algorithm for obtaining all minimal covers and a partition with a minimal number of classes is given.

Let $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ be a finite set and $\mathcal{E} = (E_i)_{1 \leqslant i \leqslant m}$ be a family of nonempty subsets of X with the property that they cover X, i.e. $\bigcup_{i=1}^{m} E_i = X$.

We shall suppose that E_i are incomparable relative to set inclusion, namely $E_i \not\subset E_j$ for every $i \neq j$.

A minimal cover of X by elements of $\mathcal{E}$ is a family $(E_{i_k})_{1 \leqslant k \leqslant r}$ with $E_{i_k} \in \mathcal{E}$, which contains a minimal number of sets E_{i_k} with the property $\bigcup_{k=1}^{r} E_i^k = X$.

A cover $(E_{l_i})_{1 \leqslant i \leqslant p}$ is said to be irreducible if $\bigcup_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{p} E_{l_i} \neq X$ for every $k = 1, 2, ..., p$.

We choose an element $x_i \in X$ which belongs to a minimal number of sets of the family $\mathcal{E}$, namely $E_i^{(1)}, E_i^{(2)}, ..., E_i^{(s)}$.

We shall define a directed rooted tree [5] $A_{\mathcal{E}} = (\bar{X}, \Lambda)$ by recurrence as follows:

The root of $A_{\mathcal{E}}$ is the vertex x_i and the set of vertices joined by an arc with x_i is $\Lambda(x_i) = \{x_{i,k} \mid k = 1, 2, ..., s\}$.

With each arc $(x_i, x_{i,k})$ we associate the set $E_i^{(k)} \in \mathcal{E}$ where $k = 1, ..., s$.

We choose now an element denoted by $x_{i,1} \in X - E_i^{(1)}$ ($A - B$ de notes the set subtraction, i.e. the set of the elements which belong to A and do not belong to B), which belongs to a minimal number of sets of E, namely: $E_{i,1}^{(1)}, E_{i,1}^{(2)}, ..., E_{i,1}^{(r)}$.

We define $\Lambda(x_{i,1}) = \{x_{i,1,k} \mid k = 1, 2, ..., r\}$ associating with each arc $(x_{i,1}, x_{i,1,k})$ the set $E_{i,1}^{(k)} \in \mathcal{E}$ where $1 \leqslant k \leqslant r$ and so on.

For the path $(x_i, x_{i,n_1}, ..., x_{i,n_1,...,n_j})$ from the root x_i to the vertex $x_{i,n_1,...,n_j}$, if $X = E_{i,n_1,...,n_j}$ where $E_{i,n_1,...,n_j}$ is the join of the sets associated with the arcs of the path, then we define $\Lambda(x_{i,n_1,...,n}) = \emptyset$. In this case clearly $n_j = 1$ and the vertex $x_{i,n_1,...,n_j}$ is a terminal vertex.

If $X \neq E_{i,n_1,...,n_j}$ then we consider an element denoted by $x_{i,n_1,...,n_j} \in X - E_{i,n_1,...,n_j}$ which belongs to a minimal number (equal to t) of sets of the family $\mathcal{E}$ and we define:

$$\Lambda(x_{i,n_1,...,n_j}) = \{x_{i\,n_1,...,n_j,k} \mid k = 1, 2, ..., t\}.$$

Theorem 3: *The set of covers associated with the paths from the root x_i to the terminal vertices of the directed tree $A_{\mathcal{E}}$ contains the set of irreducible covers of the set X by sets from the family $\mathcal{E}$.*

Proof. Let $(E_{i_k})_{1 \leqslant k \leqslant p}$ be an irreducible cover of X by sets from $\mathcal{E}$. We may suppose that $x_i \in E_{i_1}$, hence there exists an index $1 \leqslant m_1 \leqslant s$ such that $E_{i_1} = E_i^{(m_1)}$.

Because $x_{i,m_1} \notin E_{i_1}$ there is a set E_{i_2} of the cover $(E_{i_k})_{1 \leqslant k \leqslant p}$ such that $x_{i,m_1} \in E_{i_2}$, and hence there is an index m_2 such that $E_{i_2} = E_{i,m_1}^{(m_2)}$ etc.

In this way we deduce that the cover $(E_{i_k})_{1 \leqslant k \leqslant p}$ is in fact a cover $E_i^{(m_1)}, ..., E_{i,m_1,...,m_{p-1}}^{(m_p)}$ with $m_p = 1$ of X, associated with the path $(x_i, x_{i,m_1}, ..., x_{i,m_1,...,m_p})$ from the root x_i to the terminal vertex $x_{i,m_1,...,m_p}$ of $A_{\mathcal{E}}$ q.e.d.

A partition $\{X_j\}_{1 \leqslant j \leqslant q}$ of the set X is said to be compatible with the family $\mathcal{E}$ if for every $j = 1, ..., q$ there exists a set $E_{i_j} \in \mathcal{E}$ such that $X_j \subset E_{i_j}$ and the cover $(E_{i_j})_{1 \leqslant i \leqslant q}$ is said to be generated by the partition $\{X_j\}_{1 \leqslant j \leqslant q}$.

A cover of the set X generates at least one partition compatible with the family $\mathcal{E}$ by deleting in a way the common elements from the sets of the cover. We have obtained a correspodence between the set of the minimal covers and the set of the minimal partitions compatible with $\mathcal{E}$.

For every $X_1 \subset X$ we shall denote by $\mathcal{E}_{X_1}$ the family $(E_i - X_1)_{1 \leqslant i \leqslant m}$. Generally, this family is not composed from sets incomparable relative to set inclusion.

We propose the following algorithm:

We choose an element $x_i \in X$ which belongs to a minimal number of sets of the family $\mathcal{E}$, namely: $E_i^{(1)}, E_i^{(2)}, ..., E_i^{(r)}$.

We shall define a rooted tree $A^*_{\mathcal{E}} = (\overline{X}^*, \Lambda^*)$ which has as root the vertex x_i and Λ^* is defined as follows: $\Lambda^*(x_i) = \{x_{i,k} \mid k = 1, 2, ..., r\}$ and with every arc $(x_i, x_{i,k})$ we associate the set $E_i^{(k)} \in \mathcal{E}$ where $k = 1, ..., r$.

From the set $X - E_i^{(1)}$ we choose an element denoted by $x_{i,1}$, which belongs to a minimal number of maximal sets relative to set inclusion (a maximal set is one that is not contained in any other set) of the family $\mathcal{E}_{E_i^{(1)}}$, namely: $E_{i,1}^{(1)}, E_{i,1}^{(2)}, \dots, E_{i,1}^{(s)}$.

We define $\Lambda^*(x_{i,1}) = \{x_{i,1,k} \mid k = 1, 2, \dots, s\}$ associating with every arc $(x_{i,1}, x_{i,1,k})$ the maximal set $E_{i,1}^{(k)}$ where $1 \leqslant k \leqslant s$ and so on.

If we consider the path $(x_i, x_{i,n_1}, \dots, x_{i,n_1}, \dots, {}_{nj})$ from the root x_i to the vertex $x_{i,n_1}, \dots, {}_{nj}$, if $X = E_{i,n_1}, \dots, {}_{nj}$ where $E_{i,n_1}, \dots, {}_{nj}$ is the join of the sets associated with the arcs of the path, then we define $\Lambda^*(x_{i,n_1}, \dots, {}_{nj}) = \emptyset$.

In this case $n_j = 1$ and the vertex $x_{i,n_1}, \dots, {}_{nj}$ is a terminal vertex of the directed tree.

If $X \neq E_{i,n_1}, \dots, {}_{nj}$ then we choose an element denoted by $x_{i,n_1}, \dots, {}_{nj} \in X - E_{i,n_1}, \dots, {}_{nj}$ which belongs to a minimal number (equal to t) of maximal sets of the family $\mathcal{E}_{E_{i,n_1}, \dots, {}_{nj}}$ and we define:

$$\Lambda^*(x_{i,n_1}, \dots, {}_{nj}) = \{x_{i,n_1}, \dots, {}_{nj}, {}_k \mid k = 1, 2, \dots, t\}.$$

With every path $(x_i, x_{i,n_1}, \dots, x_{i,n_1}, \dots, {}_{nj})$ of lenght j which passes from x_i to the terminal vertex $x_{i,n_1}, \dots, {}_{nj}$ $(n_j = 1)$ we associate a partition of the set X with h classes:

$$E_i^{(n_1)}, \dots, E_{n_1}^{(n_j)}, \dots, {}_{n_{j-1}}.$$

Theorem 4: *The set of partitions associated with the paths which pass from the root x_i to the terminal vertices of the rooted tree A^* contains at least one partition with a minimal number of classes compatible with the family of sets $\mathcal{E}$.*

Proof. Let $\{X_j\}_{1 \leqslant j \leqslant p}$ be a partition of X with a minimal number of classes, compatible with the family $\mathcal{E}$.

We may suppose that $x_i \in X_1$, therefore there is an index $1 \leqslant m_1 \leqslant r$ such that $X_1 \subset E_i^{(m_1)}$, because the partition mentioned above is compatible with $\mathcal{E}$.

If $X_1 \neq E_i^{(m_1)}$ then the class X_1, is completed up to $E_i^{(m_1)}$ by deleting from the remaining classses the elements of $E_i^{(m_1)}$ which do not belong to X_1.

Thus we obtain a new partition $E_i^{(m_1)}, X_2', \dots, X_p'$ of the set X, compatible with $\mathcal{E}$ and $X_j' \subset X_j$, $X_i' \neq \emptyset$ for any $j = 2, \dots, p$ as a result of the minimality assumption for the partition $\{X_j\}_{1 \leqslant j \leqslant p}$.

We can now assume that $x_{i,m_1} \in X_2'$, hence there exists an index $1 \leqslant m_2 \leqslant s'$ for which the class $X_1' \subset E_{i\,m_1}^{(m_2)}$ because $X_2' \subset X - E_i^{(m_1)}$, hence X_2'

is compatible with the family $\mathcal{E}_{E_i}^{(m_1)}$ and $E_{i,m_1}^{(1)}, \dots, E_{i,m_1}^{(s')}$ are all maximal sets of the familly $\mathcal{E}_{E_i}^{(m_1)}$.

If $X_2' \neq E_{i,m_1}^{(m_2)}$ then we complete the class X_2' which becomes $E_{i,m_1}^{(m_2)}$ by deleting the elements of $E_{i,m_1}^{(m_2)}$ which do not belong to X_2' from the classes $X_3', \dots, X_p'$ of the partition and so on.

In this way we find a partition of X: $E_i^{(m_1)}, E_{i,m_1}^{(m_2)}, \dots, E_{i,m_1,\dots,m_{p-1}}^{(m_p)}$ (with $m_p = 1$) having a minimal number of classes (equal to p) and compatible with $\mathcal{E}$, which is associated with the path $(x_i, x_{i,m_1}, \dots, x_{i,m,\dots,m_p})$ from the root x_i to the terminal vertex $x_{i,m_1,\dots,m_p}$ of the directed tree A^* q.e.d.

Example. We shall consider the set $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ and $\mathcal{E}$ composed from the sets:

$A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 2, 4\}$, $C = \{1, 3, 4\}$, $D = \{1, 3, 5\}$ and $E = \{1, 4, 5\}$. By applying Petrick's algorithm [6] we obtain $(A \vee B \vee C \vee D \vee E)(A \vee B)(A \vee C \vee D)(B \vee C \vee E)(D \vee E) = AE \vee BD \vee ACD \vee BCE$.

This expression gives all irreducible covers and minimal covers, namely (A, E) and (B, D).

On applying the above methods to this example the following trees are obtained.

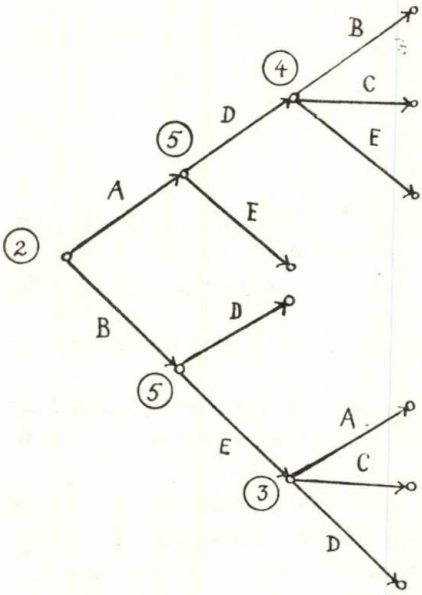


Fig. 2

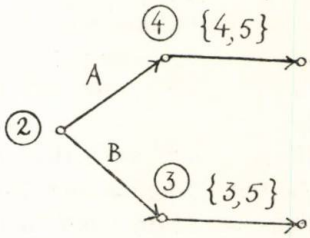


Fig. 3

From figure 2 by applying an absorption law we obtain all irreductible covers of X and from figure 3 we obtain two minimal partitions from

which we deduce the minimal covers (A, E) and (B, D) because $\{4, 5\} \subset E$ and $\{3, 5\} \subset D$.

We may solve a more general covering problem if we associate with each set E_i from $\mathcal{E}$ a cost $c_i > 0$ and by choosing from the tree $A_{\mathcal{E}}$ an irreducible cover $(E_{i_k})_{1 \leqslant k \leqslant p}$ for which $\sum_{k=1}^{p} c_{i_k} =$ minimum.

To minimize the number of states for the restricted class of incompletely specified sequential machines described above, X is the set of internal states and $\mathcal{E}$ is the set of maximal compatibility classes.

In the case of two-level minimization of Boolean functions, the set X is the set of the vertices of n-hypercube where the function takes the value 1 and the family $\mathcal{E}$ is the set of prime implicants of the function, each implicant with k letters being a set of 2^{n-k} vertices of X.

To determine the chromatic number of a finite graph, we choose X — the set of vertices of the graph and $\mathcal{E}$ — the family of the maximal independent sets of vertices of the graph, an independent (or internally stable) set X_1 being a set of vertices such that the graph induced by the vertices from X_1 is composed of isolated vertices only.

An algorithm for determining at least one minimal partition of the set of states composed from compatibility classes was programmed in FORTRAN IV with 367 statements, the first 150 determined the maximal compatibility classes starting from the matrix A_r of all pairs of compatible states and using a straightforward algorithm due to Bednarek and Taulbee [7] and the other chose at least one optimal cover.

This algorithm which is based upon the Theorem 4 is of type branch and bound and uses an upper bound $\beta_\Delta(\mathfrak{A})$ for the minimal number of classes of such a partition.

In order to put the algorithm for obtaining a minimal partition in a form able to be programmed for a computer, we make use of the concept of a „pushdown stack", which is important in the theory of compilation.

The technical details of this program will be published elsewhere.

For a machine with 40 states and 652 pairs of incompatible states the computer IBM 360/30 printed 4 minimal partitions with 13 classes and 3 partitions with 14 classes (for this machine $\beta_\Delta(\mathfrak{A}) = 14$), in 5 minutes.

However, the number of minimal partitions explored by this method may be very large.

For example if the machine $\mathfrak{A}$ with n states has only two maximal incompatibility classes having respectively $\left[\frac{n}{2}\right]$ and $\left\{\frac{n}{2}\right\}$ states ($[x]$ represents the integral part of x and $\{x\} = -[-x]$), then this alorithm produces $\left[\frac{n}{2}\right]!$ minimal partitions with $\left\{\frac{n}{2}\right\}$ classes, while Petrick's algorithm gives at least $\left[\frac{n}{2}\right]!$ irreducible covers composed from compatibility classes.

The maximal number of the minimal covers of a flow table with compatibility classes (or the maximal number of ways in that a graph may be

colored with a minimal number of colors) may be also very large, being equal to $\max\limits_{r=[x],[x]+1} (r^{n-r})$, where x is the solution of the equation $x(1+\ln x)=n$, for a machine with n states [11].

This number increases rapidly with n (for $n=10$ we find 4096 and for $n=15$ we find 10 077 696 minimal covers), therefore approximative methods for obtaining a nearly minimal partition such as those proposed by D. Welsh and M. Powell [8], D. Wood [9] or R. Wilkov and W. Kim [10] are very important for this problem.

REFERENCES

[1] M. C. Paull and S. H. Unger, *Minimizing the number of states in incompletely specified sequential switching functions*, IRE Trans. on Electronic Computers, vol. EC-8, Sep. 1959, pp. 356–367.

[2] R. E. Miller, *Switching theory*, vol. 2: *Sequential circuits and machines*, J. Willey, New York — London — Sidney, 1966.

[3] S. Unger, *Flow table simplification-some useful aids*, IEEE Trans. on Electronic Computers, vol. EC-14, 3, 1965, pp. 472–475.

[4] E. J. Mc Cluskey, *Minimum-state sequential circuits for a rectricted class of incompletely specified flow tables*, Bell Sys. Tech. J., XLI, 6, 1962, pp. 1759–1768.

[5] C. Berge, *Théorie des graphes et ses applications*, 2e éd., Dunod, Paris, 1963.

[6] S. Petrick, *A direct determination of the irredundant forms of a Boolean function from the set of prime implicants*, AFCRC-TR-56-110, Air Force Cambridge Research Center, 1956.

[7] A. Bednarek and O. Taulbee, *On maximal chains*, Revue roum. de math. pures et appl., XI, 1, 1966, pp. 23–25.

[8] D. J. Welsh and M. Powell, *An upper bound for the chromatic number of a graph and its application to timetabling problems*, Computer J., vol. 3, 1, 1967, pp.85–86.

[9] D. C. Wood, *A technique for colouring a graph applicable to large scale timetabling problems*, Computer J., vol. 12, 4, 1969, pp. 317–319.

[10] R. Wilkov and W. Kim, *A practical approach to the chromatic partition problem*, J. of the Franklin Inst., vol. 289, 5, 1970, pp. 333–349.

[11] I. Tomescu, *Le nombre maximal de colorations d'un graphe*, Comptes Rendus Acad. Sc. Paris, A, t. 272, 1971, pp. 1301–1303.

RECEIVED ON 10. X. 1971

UNIVERSITY OF BUCHAREST
FACULTY OF MATHEMATICS
AND MECHANICS

APLICAREA SIMULĂRII DIGITALE ÎN REZOLVAREA PROBLEMELOR DE TIP PERT CU RESURSE

I. VĂDUVA, GH. CIOBANU

Punctul de vedere esenţial în această lucrare este acela al considerării elementelor care intervin în problemele de tip PERT, drept variabile aleatoare. Fără îndoială, acest punct de vedere este cel mai adecvat situaţiilor practice.

Variabilele aleatoare care intervin în probleme de tip PERT cu resurse sînt, deobicei, *duratele* de execuţie a activităţilor şi *intensităţile* resurselor necesare. Dacă X este o astfel de variabilă ea trebuie să aibă următoarele proprietăţi (vezi şi THOMAS 1968)):

1° Să fie mărginită, adică să existe un interval finit (A, B) astfel încît $P(X \notin (A, B)) = 0$.

2° Să existe o valoare M cea mai probabilă, $M \in (A, B)$ adică X să fie o variabilă aleatoare unimodală.

3° Din inegalitatea lui Cebîşev rezultă că dacă $\mu = E(X)$, $\sigma^2 = \mathrm{Var}(X)$, atunci $P(|X - \mu| < 3\sigma) \geqslant 1 - \frac{1}{9}$; de aceea se poate impune ca variabilele de tip PERT să aibă şi proprietatea $B - A = 6\sigma$.

În problemele de tip PERT intervin deobicei următoarele tipuri de variabile aleatoare.

a) Variabila lognormală. Variabila aleatoare Y se nunumeşte lognormală dacă $X = \ln Y$ are o repartiţie normală adică

$$P(X < x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(z-\mu)^2}{2\sigma^2}} dz \tag{1}$$

Deobicei, duratele activităţilor şi intensităţile resurselor au repartiţii lognormale.

Această variabilă nu satisface în mod riguros condiţia 1°, însă se poate arăta că oricare ar fi $\varepsilon > 0$, există un interval (A, B) astfel ca $P(Y \notin (A,B) < \varepsilon$.

b) Variabila beta. O variabilă aleatoare V are repartiţia beta dacă densitatea sa de repartiţie este

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{B(p, q)} x^{p-1}(1 - x)^{q-1} & x \in [0, 1] \\ 0 & \text{în rest} \end{cases} \tag{2}$$

unde

$$B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1}(1 - x)^{q-1}\, dx. \tag{2'}$$

Variabila V nu satisface condițiile 1° și 2° de mai sus; de aceea trebuie să facem transformarea

$$W = (B - A)V + A. \tag{3}$$

Densitatea de repartiție a variabilei W este

$$f(w) = \begin{cases} \dfrac{1}{(B - A)^{p+q-1} B(p, q)} (t - A)^{p-1} (B - t)^{q-1} & x \in [A, B] \\ 0 & \text{în rest} \end{cases} \tag{4}$$

Variabila aleatoare W se mai numește și variabilă beta PERT. Se arată că

$$M = \frac{A(q - 1) + B(p - 1)}{p + q - 2}$$

$$\mu = \frac{A + (p + q - 2)\, M + B}{p + q} \tag{4'}$$

$$\sigma^2 = \frac{pq(B - A)^2}{(p + q + 1)\,(p + q)^2}$$

Dacă impunem condiția $B - A = 6\sigma$, obținem o ecuație în p și q. Presupunînd pentru simplificare

$$p + q = 6, \quad \text{adică } \mu = \frac{A + 4M + B}{6} \tag{4''}$$

se obține un sistem de ecuații care are soluțiile

$$\begin{aligned} p &= 3 - \sqrt{2} & \qquad p &= 3 + \sqrt{2} \\ q &= 3 + \sqrt{2} & \qquad q &= 3 - \sqrt{2} \end{aligned} \tag{5}$$

Prima soluție corespunde modului deplasat spre stînga (asimetric stînga) iar cea de-a doua corespunde modului deplasat spre dreapta. Deoarece în practică există tendința de a scurta durata de execuție sau cantitățile de resurse, vom presupune că variabila W are asimetrie stînga ($p = 3 - \sqrt{2}$, $q = 3 + \sqrt{2}$).

c) V a r i a b i l e și v e c t o r i n o r m a l i. În special intensitățile resurselor utilizate pentru realizarea activităților sînt variabile normale. Uneori, cînd în același timp la aceeași activitate, se utilizează mai multe tipuri de resurse, repartiția vectorului $\mathbf{X} = (X_1, \ldots X_k)'$, ale cărui componente

X_i sînt intensităţi de resurse, este o repartiţie normală k-dimensională; densitatea de repartiţie a lui **X** este

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{k}{2}} (det\, \Sigma)^{\frac{k}{2}}} e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})' \Sigma^{-1} (\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})} \qquad \mathbf{x} \in R^k \tag{6}$$

unde $\boldsymbol{\mu}$ este vectorul medie al lui **X**, iar Σ este matricea de convarianţă.

Fiecare componentă X_i, $1 \leqslant i \leqslant k$ este o variabilă care satisface condiţiile 1° şi 2°.

d) V a r i a b i l e u n i f o r m e. Un loc special printre variabilele care intervin în rezolvarea problemei PERT cu resurse îl ocupă variabila aleatoare U uniformă pe un interval real [P, Q]. Pentru a realiza în mod eficient nivelarea resurselor vom genera la întîmplare momentul $t \in [P, Q]$ la care să înceapă o activitate; aici $[P, Q]$ este intervalul de timp, în care poate începe o activitate, funcţie de logica graficului.

Legat de punctul de vedere clasic privitor la problemele de tip PERT fără resurse cu elemente aleatoare în literatură (vezi CLARK (1961), THOMAS (1968)), se presupune că variabilele aleatoare care intervin satisfac condiţiile 1°—3° menţionate anterior şi că toate aceste variabile sînt independente stochastic.

Drumul critic se calculează luînd în considerare numai duratele medii μ_a ale activităţilor a. Dacă $\mathcal{C}$ este un drum critic, atunci durata totală a proiectului T şi dispersia ei σ_T^2 se calculează, respectiv, după formulele

$$T = \sum_{a \in \mathcal{C}} d_a, \quad \sigma_T^2 = \sum_{a \in \mathcal{C}} \sigma_a^2 \tag{7}$$

unde σ_a^2 este dispersia activităţii (a). În ceea ce priveşte interpretarea rezultatelor problemelor PERT considerate probabilistic, se admite că are loc teorema limită centrală, deci că durata totală T are o repartiţie normală. Pe baza acestei ipoteze se compară durata totală T cu termenul planificat T_p. Astfel, calculînd abaterea normată

$$z = \frac{T_p - T}{\sigma_T} \tag{8}$$

şi utilizînd funcţia lui Laplace

$$\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \tag{9}$$

se poate stabili probabilitatea de a respecta termenul planificat T_p.

Într-o planificare raţională a activităţilor se recomandă ca probabilitatea de încadrare în termen a proiectului să oscileze în intervalul [0,5; 0,6]. Pentru o probabilitate mai mare decît 0,6 siguranţa de realizare a termenului planificat T_p creşte, dar este necesară o suplimentare de resurse.

Pentru a aplica procedura de mai sus, specifică metodei PERT, este necesar să fie îndeplinite şi următoarele condiţii esenţiale:

i) lungimea drumului critic trebuie să difere semnificativ (mai mult de 15%) de lungimea oricărui alt drum complet astfel ca să se asigure un singur drum critic probabil;

ii) drumul critic trebuie să conțină un număr mare de activități fără ca niciuna să fie preponderentă (durata oricărei activități să fie cel mult 10% din durata totală), pentru a se putea aplica teorema limită centrală.

În numeroase cazuri practice aceste două condiții nu sînt satisfăcute, ceea ce limitează domeniul de aplicabilitate a metodei PERT. Utilizarea metodei PERT fără a ține seama de condițiile (*i*) și (*ii*) conduce la erori.

Să considerăm, de exemplu un grafic-rețea în care există un drum complet $\mathcal{C}_2$ de durată T_2 a cărui lungime este foarte apropiată sub (5%) de lungimea drumului critic ($\mathcal{C}_1$) de durată T_1.

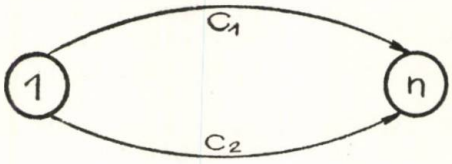


Fig. 1

Duratele totale T_1 și T_2 au repartiție normală cu mediile $\bar{t}_1$ și $\bar{t}_2((\bar{t}_1 > \bar{t}_2)$ de valori apropiate. Pe cazuri particulare există și posibilitatea ca $T_2 > T_1$. Lungimea drumului critic este dată de max (T_1, T_2). Pentru a cunoaște adevărata lungime a drumului critic trebuie considerată media variabilei aleatoare max (T_1, T_2). În [4] C. E. Clark demonstrează că media și dispersia variabilei aleatoare max (T_1, T_2) sînt date de relațiile:

$$\bar{t} = \bar{t}_1\Phi(\alpha) + \bar{t}_2\Phi(-\alpha) + \sqrt{\frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}{2\pi}}\, e^{-\frac{\alpha^2}{2}}$$

$$\sigma^2 = (\bar{t}_1^2 + \sigma_1^2)\,\Phi(\alpha) + (\bar{t}_2^2 + \sigma_2^2)\Phi(-\alpha) + (\bar{t}_1 + \bar{t}_2)\sqrt{\frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}{2\pi}}\, e^{-\frac{\alpha^2}{2}} - \bar{t}^2$$

unde

$$\alpha = \frac{\bar{t}_1 - \bar{t}_2}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}}$$

În particular, pentru $\bar{t}_1 = \bar{t}_2$ rezultă $\alpha = 0$ și

$$\bar{t} = \bar{t}_1 + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$$

Deci media duratei unei lucrări este mai mare decît media rezultată din metoda PERT.

Pentru a înlătura erorile metodei PERT în cazul nerespectării condițiilor *i)* și *ii)* este necesar a se aplica o metodă statistică bazată pe stimulare. Fiind date structura graficului și repartițiile duratelor, metoda simulării constă în a aplica algoritmul de calcul al drumului critic pentru un număr suficient de mare de mulțimi de durate ale activităților, generate conform repartițiilor corespunzătoare. Simularea ajută la estimarea parametrilor repartiției duratei totale și dă posibilitatea de a determina frecvența caracterului critic pentru fiecare activitate.

Metoda (algoritm TC) constă în următoarele:

1. Se generează duratele activităților aleatoare conform cu anumite repartiții date (Beta sau lognormală) în intervalul [A, B].
2. Se calculează drumul critic, se găsesc activitățile critice și termenele activităților.
3. Se determină durata T_i a proiectului.

Se repetă etapele 1), 2), 3) de N ori, N suficient de mare.

Media $\bar{\mu}$ și dispersia $\sigma^2(T)$ a duratei totale T a lucrării sînt date de formulele:

$$\bar{\mu} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} T_i, \qquad s^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} (T_i - \bar{\mu})^2.$$

Pentru fiecare activitate se determină indicele de criticabilitate.

$$C_i = \frac{\nu_i}{N}$$

unde ν_i este numărul care exprimă de cîte ori activitatea (i) a fost activitate critică din cele N cazuri studiate.

Activitățile cu indicii C_i cei mai mari formează drumurile critice în graf.

După rezolvarea etapelor 1, 2, 3, precizate anterior urmează etapa nivelării resurselor.

În această lucrare se prezintă mai întîi algoritmi pentru generarea *duratelor* și *resurselor* aleatoare, ținînd seama de faptul că duratele și resursele pot fi corelate; apoi se dă un algoritm pentru nivelarea resurselor și modul de aplicare a simulării digitale în rezolvarea problemelor PERT cu resurse.

1. Generarea variabilelor normale și lognormale

Generarea variabilelor aleatoare normale este o problemă în general rezolvată ca și aceea a variabilelor lognormale. Sînt necesare numai unele precizări legate de generarea vectorilor aleatori și a variabilelor condiționate. De aceea vom da mai întîi unele proprietăți ale vectorilor aleatori normali și lognormali.

Lema. 1. *Fie Y_1 o variabilă aleatoare lognormală şi Y_2 o* variabilă aleatoare normală şi fie

$$m_1 = E(Y_1) \qquad \mu_2 = E(Y_2)$$

$$s_1^2 = \mathrm{Var}(Y_1) \qquad \sigma_2^2 = \mathrm{Var}(Y_2)$$

$$r = \mathrm{Corr}(Y_1, Y_2) = \frac{\mathrm{Cov}(Y_1, Y_2)}{s_1 \sigma_2}$$

Atunci vectorul aleator $\mathbf{X} = (X_1, X_2)'$, $X_1 = \ln Y_1$, $X_2 = Y_2$ *este un vector aleator normal* $N(\boldsymbol{\mu}, \Sigma)$ *unde*

$$\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \mu_2)', \ \mu_i = E(X_i), \ i = 1,2$$

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix} \tag{1.1}$$

$$\sigma_{ij} = \mathrm{Cov}(X_i, X_j), \ i, j = 1, 2$$

$$\sigma_i^2 = \mathrm{Var}(X_i), \ i = 1, 2$$

$$\rho = \frac{\mathrm{Cov}(X_1, X_2)}{\sigma_1 \sigma_2}$$

şi în plus

$$\mu_1 = \ln m_1 - \frac{1}{2} \ln\left[\left(\frac{s_1}{m_1}\right)^2 + 1\right] \tag{1.2}$$

$$\sigma_1^2 = \ln\left[\left(\frac{s_1}{m_1}\right)^2 + 1\right] \tag{1.3}$$

$$\rho = \frac{rs_1}{m_1\sqrt{ln\left[\left(\frac{s_1}{m_1}\right)^2 + 1\right]}} \tag{1.4}$$

De m o n s t r a ţ i e. Întrucît Y_1 este lognormală rezultă că densitatea de repartiţie a variabilei $X_1 = \ln Y_1$ este

$$f_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_1} e^{-\frac{1}{2}\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}}, \ -\infty < x < \infty.$$

Deci densitatea de repartiţie a lui Y_1 este

$$g_1(y_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_1 y_1} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{lny_1 - \mu_1}{\sigma_1}\right)^2}, \quad 0 < y_1 < \infty.$$

Se observă că

$$E(Y_1^r) = \int_0^\infty y_1^r g_1(y_1)\, dy_1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_1} \int_0^\infty y_1^{r-1} e^{-\frac{1}{2\sigma_1^2}(lny_1 - \mu_1)^2} dy_1$$

Făcînd transformarea

$$z_1 = \frac{ln\ y_1 - \mu_1}{\sigma_1}$$

obținem

$$E(Y_1^r) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{r(\mu_1 + z_1\sigma_1)} e^{-\frac{z_1^2}{2}} dz_1 = e^{\frac{1}{2} r^2\sigma_1^2 + r\mu_1}$$

Deci

$$m_1 = E(Y_1) = e^{\frac{\sigma_1^2}{2} + \mu_1}$$

$$E(Y_1^2) = e^{2\sigma_1^2 + 2\mu_1} \tag{1.2'}$$

$$s_1^2 = \mathrm{Var}[Y_1] = E[Y_1^2] - [E(Y_1]^2 = e^{\sigma_1^2 + 2\mu_1}[e^{\sigma_1^2} - 1] \tag{1.3'}$$

iar din (1.2′) și (1.3′) rezultă (1.2) și (1.3).

Deoarece Y_1 este o variabilă lognormală se știe că vectorul $\mathbf{X} = (X_1, X_2)$ are o repartiție normală bidimensională a cărei densitate de repartiție este

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sqrt{\det \Sigma}} e^{-\frac{1}{2} Q(x_1, x_2)} \tag{1.5}$$

$$Q(x_1, x_2) = \sigma^{11}(x_1 - \mu_1)^2 + 2\sigma^{12}(x_1 - \mu_1)(x_2 - \mu_2) + \sigma^{22}(x_2 - \mu_2)^2$$

unde

$$\Sigma^{-1} = \begin{pmatrix} \sigma^{11} & \sigma^{12} \\ \sigma^{21} & \sigma^{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma_1^2} & -\frac{\rho}{\sigma_1\sigma_2} \\ -\frac{\rho}{\sigma_1\sigma_2} & \frac{1}{\sigma_2^2} \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{1 - \rho^2}\ ;\ \det \Sigma = \sigma_1^2\sigma_2^2(1 - \rho^2) \tag{1.5'}$$

Din (1.5) rezultă că densitatea de repartiție a vectorului $(Y_1, Y_2)'$ este

$$f(y_1, y_2) = \frac{1}{2\pi\sqrt{\det \Sigma}\, y_1} e^{-\frac{1}{2} Q(lny_1, y_2)}$$

de unde

$$E(Y_1, Y_2) = \frac{1}{2\pi\sqrt{\det \Sigma}} \int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2} Q(lny, y)} dy_1, dy_2$$

Făcînd în ultima integrală transformarea

$$z_1 = \sqrt{\sigma^{11}}\left[\ln y_1 - \mu_1 + \frac{\sigma^{12}}{\sigma^{11}}(y_2 - \mu_2)\right] \tag{1.6}$$

$$z_2 = \sqrt{\frac{1}{\sigma^{11}\det \Sigma}}(y_2 - \mu_2)$$

obținem

$$Q(z_1, z_2) = z_1^2 + z_2^2.$$

Deoarece inversa transformării (1.6) este

$$y_1 = e^{\mu_1 + \frac{z_1}{\sqrt{\sigma^{11}}} - \sigma^{12}\sqrt{\frac{det\,\Sigma}{\sigma^{11}}}\, z_2}$$

$$y_2 = \mu_2 + \sqrt{\sigma^{11} \det \Sigma}\, z_2$$

iar iacobianul ei satisface relația

$$\frac{D(y_1, y_2)}{D(z_1, z_2)} = y_1 \sqrt{\det \Sigma}$$

rezultă

$$E(Y_1 Y_2) = e^{\mu_1 + \frac{\sigma_1^2}{2}} [\mu_2 + \rho\sigma_1\sigma_2] \tag{1.7}$$

Deci

$$\mathrm{Cov}(Y_1, Y_2) = E(Y_1, Y_2) - E(Y_1)\, E(Y_2) = e^{\mu_1 + \frac{\sigma_1^2}{2}} [\mu_2 + \rho\sigma_1\sigma_2] - \mu_2 e^{\mu_1 + \frac{\sigma_1^2}{2}} =$$

$$= \rho\sigma_1\sigma_2\, e^{\mu_1 + \frac{\sigma_1^2}{2}} = \rho\sigma_1\sigma_2 m_1 \tag{1.8}$$

Din ultima relație ținînd seama de (1.2) și (1.3) rezultă (1.4) Lema este demonstrată.

L e m a 2. *Fie* Y_i, $i = 1,2$ *variabile aleatoare longnormale* și să notăm

$$m_i = E(Y_i)\; s_i^2 = \mathrm{Var}(V_i),\; i = 1,\; 2,$$

$$r^* = \frac{\mathrm{Cov}(Y_1, Y_2)}{s_1 s_2} = \mathrm{Corr}(Y_1, Y_2)$$

$$X_i = \ln Y_i \quad \mu_i = E(X_i), \quad \sigma_i^2 = \mathrm{Var}\,(X_i)\; i = 1,2,$$

$$\rho = \frac{\mathrm{Cov}(X_1, X_2)}{\sigma_1\, \sigma_2} = \mathrm{Corr}(X_i, X_j)$$

Atunci vectorul aleator $(X_1, X_2)'$, *este un vector aleator normal* $N(\boldsymbol{\mu}, \Sigma$ *cu* $\boldsymbol{\mu}$ *și* Σ *definite de (1.1) și în plus*

$$\mu_i = ln\, m_i - \frac{1}{2}\, ln\left[\left(\frac{s_i}{m_i}\right)^2 + 1\right] \tag{1.9}$$

$$\sigma_i^2 = ln\left[\left(\frac{s_i}{m_i}\right)^2 + 1\right] \tag{1.10}$$

$$\rho = \frac{ln\left[\frac{r^* \cdot s_1 s_2}{m_1 m_2} + 1\right]}{\sqrt{ln\left[\left(\frac{s_1}{m_1}\right)^2 + 1\right] ln\left[\left(\frac{s_2}{m_2}\right)^2 + 1\right]}} \tag{1.11}$$

D e m o n s t r a ţ i e. Formulele (1.9) şi (1.10) sînt de fapt formulele (1.2) şi (1.3) Rămîne de demonstrat formula (1.11).

Într-adevăr, vectorul $(X_1, X_2)'$ are densitatea de repartiţie (1,5), de unde se deduce că densitatea de repartiţie a vectorului aleator $(Y_1, Y_2)'$ este

$$f(y_1, y_2) = \frac{1}{2\pi\sqrt{\det \Sigma}\, y_1 y_2} e^{-\frac{1}{2}Q(lny_1, lny_2)}$$

Deci

$$E(Y_1, Y_2) = \frac{1}{2\pi\sqrt{\det \Sigma}} \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}Q(lny_1, lny_2)} dy_1\, dy_2.$$

Făcînd transformarea

$$z_1 = \sqrt{\sigma_{11}}(ln\, y_1 - \mu_1 + \frac{\sigma^{12}}{\sigma^{11}}(ln\, y_2 - \mu_2)) \tag{1.6'}$$

$$z_2 = \sqrt{\frac{1}{\sigma^{11} \det \Sigma}}(ln\, y_2 - \mu_2),$$

avem

$$y_1 = e^{\mu_1 + \frac{z_1}{\sigma^{11}} - \sigma^{12}\sqrt{\frac{det\,\Sigma}{\sigma^{11}}}\, z_2}$$

$$y_2 = e^{\mu_2 + \sqrt{\sigma^{11} det\,\Sigma}\, z_2}$$

$$\frac{D(y_1, y_2)}{D(Z_1, Z_2)} = y_1 y_2 \sqrt{\det \Sigma}$$

de unde

$$E(Y_1 Y_2) = e^{\mu_1 + \mu_2 + \frac{1}{2\sigma^{11}} + \frac{det\,\Sigma}{2}\left(\sigma^{11} - 2\sigma^{12} + \frac{(\sigma^{12})^2}{\sigma^{11}}\right)}.$$

Dacă în ultima relaţie folosim (1.5′) avem

$$E(Y_1, Y_2) = e^{\mu_1 + \mu_2 + \frac{\sigma_1^2}{2} + \frac{\sigma_2^2}{2} + \rho\sigma_1\sigma_2}$$

deci

$$r^* s_1 s_2 = \mathrm{Cov}(Y_1, Y_2) = E(Y_1 Y_2) - E(Y_1)\, E(Y_2) =$$

$$= e^{\mu_1 + \mu_2 + \frac{\sigma_1^2}{2} + \frac{\sigma_2^2}{2}}[e^{\rho\sigma_1\sigma_2} - 1] = m_1 m_2[e^{\rho\sigma_1\sigma_2} - 1]$$

Din egalitatea

$$r^* s_1 s_2 = m_1 m_2 [e^{\rho\sigma_1\sigma_2} - 1]$$

rezultă (1.11) şi lema este demonstrată.

Consecinţă. Fie $(Y_1, \dots, Y_s)'$ *un vector aleator de componente lognormale şi* $(X_{s+1}, \dots, X_k)'$ $(s < k)$ *un vector aleator normal. Notăm*

$$X_i = \ln Y_i,\ E(Y_i) = m_i,\ \mathrm{Var}(Y_i) = s_i^2,\ 1 \leqslant i \leqslant s,$$

$$\mathrm{Corr}(Y_i, Y_j) = r_{ij}^*,\ 1 \leqslant i, j \leqslant s.$$

$$\mathrm{Corr}(X_i, X_j) = \rho_{ij}\ 1 \leqslant i, j \leqslant k$$

$$\mu_i = E(X_i),\ \mathrm{Var}(X_i) = \sigma_i^2,\ 1 \leqslant i \leqslant k$$

$$\mathrm{Corr}(Y_i, X_j) = r_{ij},\ 1 \leqslant i \leqslant s,\ s+1 \leqslant i \leqslant k.$$

Atunci

$$\mu_i = lnm_i - \frac{1}{2} \ln \left[\left(\frac{s_i}{m_i} \right)^2 + 1 \right];\quad 1 \leqslant i \leqslant s \tag{1.12}$$

$$\sigma_i^2 = \ln \left[\left(\frac{s_i}{m_i} \right)^2 + 1 \right],\quad 1 \leqslant i \leqslant s, \tag{1.13}$$

$$\rho_{ij} = \frac{r_{ij}}{m_i \sqrt{\left[\left(\frac{s_i}{m_i} \right)^2 + 1 \right]}}\ 1 \leqslant i \leqslant s,\ s+1 \leqslant j \leqslant k. \tag{1.14}$$

$$\rho_{ij} = \frac{\ln \left[\frac{r_{ij}^* s_i \cdot s_i}{m_i m_i} + 1 \right]}{\sqrt{\ln \left[\left(\frac{s_i}{m_i} \right)^2 + 1 \right] \ln \left[\left(\frac{s_j}{m_j} \right)^2 + 1 \right]}},\ 1 \leqslant i, j \leqslant s \tag{1.15}$$

iar vectorul aleator $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_k)'$ are repartiţia normală $N(\boldsymbol{\mu}, \Sigma)$ unde

$$\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \dots, \mu_k)',\ \Sigma = (\sigma_{ij}),\ \sigma_{ij} = \rho\sigma_i\sigma_j,\ 1 \leqslant i, j \leqslant k$$

Pe baza proprietăţilor enumerate se poate genera vectorul aleator $\mathbf{X}$ şi vectorul aleator

$$\mathbf{X}^* = \begin{pmatrix} Y^{(1)} \\ X^{(2)} \end{pmatrix},\quad \begin{matrix} Y^{(1)} = (Y_1, \dots, Y_s)' \\ X^{(2)} = X_{s+1}, \dots, X_k)' \end{matrix}, \tag{1.16}$$

unde $Y_i = e^{X_i}$, $1 \leqslant i \leqslant s$. Ţinînd seama de diversele procedee de generare a variabilelor aleatoare normale, generarea vectorului $\mathbf{X}^*$ se face în următoarele etape (algoritmul GDR):

a) Se construieşte un generator de numere aleatoare U uniforme pe (0,1).

b) Se construieşte un generator pentru variabila Z, normală $N(0,1)$.

*) GDR este prescurtare de la „Generare Durate-Resurse".

c) Presupunîndu-se cunoscute m_i, s_i, $1 \leqslant i \leqslant s$, r^*_{ij}, r_{il}, $1 \leqslant i, j \leqslant s$, $s+1 \leqslant l \leqslant k$ și μ_t, μ_{tl}, $s+1 \leqslant t$, $l \leqslant k$ se calculează μ_i, σ_i, $1 \leqslant i \leqslant s$, ρ_{ij}, ρ_{il} $1 \leqslant i, j \leqslant s$, $s+1, \leqslant l \leqslant k$. (Se calculează elementele vectorului $\boldsymbol{\mu}$ și matricii Σ).

d) Se generează vectorul aleator **X** normal $N(\boldsymbol{\mu}, \Sigma)$.

e) Se transformă primele s componente astfel încît $Y_i = e^{X_i}$ și se obține vectorul X^* din (1.16).

Rămîne să precizăm în continuare unele detalii privind etapele de calcul enumerate.

a) Generarea numerelor aleatoare uniforme depinde de particularitățile calculatorului utilizat. Pentru sistemele de calcul IBM 360 un generator simplu și des utilizat este următorul.

a_1) Se generează numere întregi X conform relației de recurență.

$$X_{n+1} = aX_n(\text{mod } M), M = 2^{31} \tag{1.17}$$

unde a este rădăcină primitivă mod M iar X_0 este un întreg impar.

a_2) Se iau $U = \frac{X_{n+1}}{M}$ ca număr uniform pe (0,1).

Dacă U este un număr uniform pe (0,1) atunci $v = P + (Q - P)U$ este un număr aleator uniform pe intervalul (P, Q) iar $l = [uL] + 1$ este un număr întreg pe intervalul $[1, L]$.
(Aici [x] este partea întreagă a lui x).

b) Pentru generarea unei variabile normale $N(0,1)$ există mai multe procedee (Vezi de ex. NAYLOR și a. (1966), VĂDUVA (1969) etc), însă unul din cele mai simple este cel bazat pe teorema limită centrală și el constă în următoarele

b_1) Se generează n numere aleatoare $u_1, \ldots, u_n$ uniforme pe (0,1) și independente.

b_2) Se calculează variabila

$$z = \frac{\sum_{i=1}^{n} u_i - \frac{n}{2}}{\sqrt{\frac{n}{12}}} \tag{1.18}$$

Care are o repartiție normală N (0,1).

Pentru $n = 12$ teorema limită centrală se poate considera adevărată iar (1.18) devine

$$z = \sum_{i=1}^{12} u_i - 6 \tag{1.18'}$$

c) Calculul elementelor vectorului $\boldsymbol{\mu}$ și matricii Σ se face conform formelor (1.12) (1.15).

d) Pentru generarea unui vector aleator **X** normal $N(\boldsymbol{\mu}, \Sigma)$ trebuie să se găsească mai întîi o matrice superior triunghiulară C astfel încît $\Sigma = C'C$.

Întrucît Σ este pozitiv definită o astfel de matrice există şi elementele sînt date de relaţiile.

$$C_{i1} = \frac{\sigma_{i1}}{\sqrt{\sigma_{11}}}, \quad 1 \leqslant i \leqslant k$$

$$C_{ii} = \sqrt{\sigma_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} C_{ik}^2}, \quad 1 \leqslant i \leqslant k \tag{1.19}$$

$$C_{ij} = \frac{C_{ij} - \sum_{k=1}^{j=1} C_{ik} C_{jk}}{C_{jj}}, \quad 1 < j < i \leqslant k$$

$$C_{ij} = 0, \quad 1 < i < j \leqslant k$$

unde

$$\Sigma = (\sigma_{ij})$$

Algoritmul de generare a vectorului **X** este următorul

d_1) Se generează un vector **Z** normal N (0, I) unde I este matricea unitate; acest lucru se realizează generînd variabilele $Z_1, \ldots, Z_k$ normale N (0,1) şi independente.

d_2) Se calculează

$$\mathbf{X} = \boldsymbol{\mu} + C\mathbf{Z} \tag{1.20}$$

Se arată că **X** are o repartiţie $N(\boldsymbol{\mu}, \Sigma)$.

e) Fie $\mathbf{X} = (\mathbf{X}^{(1)}, \mathbf{X}^{(2)})$ unde $\mathbf{X}^{(1)}$ este vectorul format cu primele s componente ale lui **X**. Fie $Y_i = e^{X_i}$, $1 \leqslant i \leqslant s$ şi $\mathbf{Y}^{(1)} = (Y_1, \ldots, Y_s)$, Atunci vectorul $\mathbf{X}^* = (Y^{(1)}, X^{(2)})'$ este un vector aleator care are primele s componente lognormale iar celelalte k-s normale.

Cu aceasta etapele de generare a vectorului aleator $\mathbf{X}^*$ sînt complet descrise.

În particular, pentru a genera o variabilă aleatoare Y, lognormală, astfel încît $E(Y) = m$, $Var(Y) = s$, trebuie aplicat următorul algoritm.

e_0') Se calculează mai întîi μ şi β conform formulelor (1.2) şi (1.3).

e_1') Se generează o variabilă z normală $N(0,1)$.

e_2') Se calculează $x = \mu + z\sigma$. (Variabila x este normală $N(\mu, \beta)$).

e_3') Se calculează $y = e^x$. (Variabila x este variabila lognormală generală).

2. Generarea variabilelor de tip beta.

În problemele de tip PERT cu resurse intervin şi variabile de tip beta, care corespund duratelor de execuţie.

Pentru generarea unei variabile beta de parametri p şi q vom folosi următoarea propoziţie.

L e m a 3. *Dacă X_1 şi X_2 sînt variabile aleatoare independente de tip gamma avînd respectiv parametrii (p, λ), (q, λ) atunci* variabila

$$V = \frac{X_1}{X_1 + X_2} \tag{2.1}$$

este o variabilă beta de parametri p şi q.

Demonstraţia lemei se găseşte în cartea lui WILKS, (1962), § (7.6). Conform lemei, generarea unei variabile beta se reduce la generarea unei variabile beta se reduce la generarea a două variabile de tip gamma.

Fie X o variabilă gamma de parametri p şi λ; densitatea ei de repartiţie este

$$f(x) = \frac{\lambda^p}{\Gamma(p)} x^{p-1} e^{-\lambda x}, \quad 0 \leqslant x < \infty, \lambda > 0, p > 0 \tag{2.2}$$

Se arată că

$$\mu = \frac{p}{\lambda}; \quad \sigma^2 = \frac{p}{\lambda^2}$$

Dacă p este un număr natural atunci se spune că X este o variabilă Erlang de parametri p şi λ.

Se demonstrează cu uşurinţă următoarea lemă

L e m a 4. *Dacă $Z_1, \ldots, Z_p$ sînt variabile exponenţiale independente şi identic repartizate, avînd acelaşi parametru atunci* variabila

$$X = \sum_{j=1}^{p} Z_j \tag{2.3}$$

este o variabilă Erlang de parametri p şi q.

Pentru demonstraţie vezi VADUVA (1969).

Din (1.22) şi (1.23) se vede că pentru $p = 1$ variabila gamma devine o variabilă exponenţială, adică are densitatea de repartiţie.

$$h(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad 0 \leqslant x < \infty, \tag{2.4}$$

Pentru generarea unei variabile exponenţiale Z sînt cunoscute mai multe metode (vezi VĂDUVA (1969) şi anume.

A. M e t o d a i n v e r s ă. Fie

$$H(x) = 1 - e^{-\lambda x} \tag{2.5}$$

funcţia de repartiţie exponenţială. Metoda inversă constă în a determina pe x din ecuaţia

$$H(x) = u$$

unde u este un număr aleator uniform pe (0,1). Deci generarea unei variabile exponenţiale prin metoda inversă decurge conform următoarului algoritm.

Pasul 1. Se generează un număr aleator u, uniform, pe (0,1).

Pasul 2. Se calculează $X = -\frac{1}{\lambda} ln\ u$.

B. Metoda respingerii. Această metodă se datorește lui J. von Neumann și constă din următorul algoritm (vezi BUTLER (1956).

PasulO. Inițializări: $n = \theta$; inițializări necesare generatorului de numere pseudo-aleatoare pe (0,1).

Pasul 1. $i = 0$ generează un nou număr aleator u_0, $S = 1 - u_0$

Pasul 2. $i \leftarrow i + 1$, generează un nou număr aleator u și ia $S \leftarrow S + u$,

Pasul 3. Dacă $S < 1$ se trece la pasul 2.

Îasul 4. Dacă i este par atunci $n \leftarrow n + 1$ și se execută pasul 1. (Se respinge subșirul de lungime i generat în pași 1—3).

Pasul 5. Se ia $x = u_0 + n$.

Metoda constă în a genera subșiruri de lungime $i + 1$, lungimea unui subșir fiind determinată de condiția

$$1 - u_0 + \sum_{j=1}^{i} u_j \geqslant 1$$

Dacă i este număr par atunci subșirul se respinpe; în caz contrar $x = n + u_0$ unde n este numărrl subșirurilor respinse, iar u este numărul alearor din subșirul acceptat, este o variabilă exponențială de parametru $\lambda = 1$. Prin relația

$$Z = \frac{1}{\lambda} X \tag{2.6}$$

se obține o variabilă exponențială de parametru λ.

Generarea unei variabile Erlang se face prin relația (2.3) unde Z_j $1 \leqslant j \leqslant p$ sînt variabile exponențiale.

Generarea unei variabile gamma este o problemă dificilă și ea a căpătat o rezolvare aproximativă numai în cazul $p > 1$, pe care-l vom prezenta aici.

Fie $k = [p]$ (k este partea întreagă a lui p) și fie $\alpha = p - k$, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$. Să considerăm variabilele Erlang $W(k, \lambda)$ și $W(k + 1, \lambda)$ și să generăm o variabilă x conform algoritmului:

Pasul 1. Generează un număr aleator u.

Pasul 2. Dacă $u \geqslant \alpha$, generează $W(k, \lambda)$ și iar $x = W(k, \lambda)$

Pasul 3. Generează $W(k + 1, \lambda)$ și ia $x = W(k + 1, \lambda)$.

Procedeul constă deci în a genera variabila x(variabilă gamma) astfel:

$$x = \begin{cases} W(k, \lambda) & \text{cu probabilitatea } 1 - \alpha \\ W(k + 1, \lambda) & \text{cu probabilitatea } \alpha \end{cases}$$

Se arată că

$$E(X) = p.$$

Procedeul de generare este aproximativ, însă este singurul cunoscut. Din cauza formulelor (5) rezultă că pentru metoda PERT ne este suficient cazul $p > 1$.

Deci există un procedeu pentru generarea variabilelor beta prin formula (2.1). Pentru a genera o variabilă beta, PERT, vom folosi relația (3).

3. Problema PERT cu nivelarea resurselor

Presupunem că problema PERT (timp) este rezolvată, în sensul că se cunosc algoritmi pentru determinarea duratelor unui proiect și termenelor pentru activități.

Deoarece în aplicațiile practice s-a constatat că simpla analiză a timpului nu furnizează elemente suficiente pentru a lua decizii pe parcursul executării lucrărilor a apărut necesitatea analizei resurselor. În mod uzual, intensitățile resurselor pe fiecare activitate sînt considerate deterministe. În practică, intensitățile resurselor sînt aleatoare, datorită diverselor perturbații inerente procesului de producție.

Considerăm că repartiția vectorului $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_m)'$ ale cărui componente X_i sînt intensități de resurse, este o repartiție normală sau lognormală m — dimensională — (generarea variabilelor care reprezintă intensități de resurse este condiționată de duratele generate în PERT (timp). Duratele activităților și intensitățile resurselor generale aleatoriu sînt utilizate mai departe ca date deterministe pentru aplicarea algoritmului de nivelarea resurselor.

Problema PERT cu nivelarea resurselor constă în găsirea unei ordonanțări a activităților care îndeplinește condiția unei repartizări cît mai uniforme a resurselor pe o durată totală egală cu lungimea drumului critic. Deci problema se reduce la:

a) determinarea termenului de începere al fiecărei activități.

b) stabilirea unui criteriu care să măsoare gradul de uniformitate a profilului resurselor.

Dacă ar exista un profil care să fie reprezentat printr-o paralelă la axa timpului, deci care ar fi uniform pe toată durata proiectului, atunci acel profil este optim. În general, nu există un astfel de profil optim, de aceea un criteriu trebuie să permită alegerea profilului „cel mai bun" din două sau mai multe profile.

Criteriul care se va da în continuare (3.11) stabilește între două termene de începere a unei activități, termenul pentru care neuniformitatea profilului resurselor se micșorează.

Definim următoarele mulțimi: $A = \{a\}$ — activitățile proiectului, $B_a = \{b\}$ — activitățile direct precedente activității (a), $C_a = \{c\}$ — activitățile care au activitatea (a) direct precedentă, $U = \{u_a\}\ a \in A$ — termenele de începere ale activităților proiectului. Dacă P_a este termenul de începere cel mai devreme și Q_a termenul de terminare cel mai tîrziu pentru activitatea $a \in A$ de durată d_a, avem relația de apartenență

$$u_a \in [P_a,\ Q_a - d_a] \tag{3.1}$$

L e m a 5. Orice activitate $a \in A$ poate fi programată să înceapă în intervalul de timp $[I_a,\ J_a]$ unde

$$I_a = \max_{b \in B_a} u_b \quad \text{și} \quad J_a = \min_{c \in C_a} u_c - d_a \tag{3.2}$$

D e m o n s t r a ţ i e. Pentru că nici o activitate nu poate începe dacă nu s-a terminat execuţia activităţilor direct precedente, avem relaţia

$$\max_{b \in B_a} u < \min_{e \in E_a} u \tag{3.3}$$

unde $E_a = \{ e \}$ este mulţimea activităţilor paralele cu activitatea $a \in A$. Evident $A \in E_a$. Din relaţiile (3.3) şi (3.1) rezultă (3.2).

Din această lemă rezultă:

C o n s e c i n ţ ă: $P_a \leqslant I_a \leqslant J_a \leqslant Q_a - d_a$ (3.4)

Fie $R_1, R_2, \ldots, R_m$ resursele utilizate pentru realizarea proiectului considerat şi $(X_{1a}, X_{2a}, \ldots, X_{ma})$ intensităţile resurselor folosite pentru execuţia activităţii $a \in A$; dacă $X_{ia} = o$, activitatea $a \in A$ nu foloseşte resursa R_i. Definim profilul resursei $R_i (i = 1, 2, \ldots, m)$ prin vectorul

$$N_i = (N(1) \; N_i(2), \ldots, N_i(T))$$

unde T este lungimea drumului critic şi pentru orice $t = 1, 2, \ldots, T$

$$N_i(t) = \sum_{a \in D} X_{ia} \tag{3.5}$$

cu

$$D = \{a \mid t \in [u_a, u_a + d_a)\}$$

Notăm

$$h_i(t) = N_i(t) - N_i(t-1) \tag{3.6}$$

variaţia necesarului resursei R_i la momentul t, considerînd $N_i(0) = 0$.

L e m a 6. Dacă $t \in [1, T]$ şi $i \in [1, m]$ cu i şi t întregi

$$N_i(t) = \sum_{s=1}^{t} h_i(s) \tag{3.7}$$

D e m o n s t r a ţ i e. Relaţia (3.6) scrisă sub forma

$$N_i(t) = h_i(t) + N_i(t-1)$$

este o relaţie de recurenţă din care rezultă (3.7).

L e m a 7. Dacă $t \in [1, T]$ şi $i \in [1, m]$ cu i şi t întregi

$$h_i(t) = \sum_{a \in V_t} X_{ia} - \sum_{b \in W_t} X_{ib} \tag{3.8}$$

unde $V_t = \{a \mid t = u_a\}$ şi $W_t = \{b \mid t = u_b + d_b\}$

D e m o n s t r a ţ i e. Din relaţiile (3.5) (şi (3.6) obţinem

$$h_i(t) = \sum_{a \in D^*} X_{ia} - \sum_{b \in D^+} X_{ib} \tag{3.9}$$

unde $D^* = \{a \mid t \in [u_a, u_a + d_a)\}$ şi $D^+ = \{b \mid t - 1 \in [u_b, u_b + d_b)\}$.

Se observă că $V_t = D^* \setminus (D^* \cap D^+)$ și $W_t = D^+ \setminus (D^* \cap D^+)$ Deci (3.8) provine din (3.9) prin reducerea termenilor X_{ia} pentru care $a \in D^* \cap D^+$.

Notăm $h_i = (h_i\ (1),\ h_i\ (2),\ \dots,\ h_i(T))$

și

$$H = (h_1,\ h_2,\ \dots,\ h_m)'.$$

Lema 7 dă un procedeu rapid pentru determinarea matricii H efectuînd pentru fiecare activitate următoarele calcule

$$h_i(u_a) \leftarrow h_i(u_a) + X_{ia} \qquad i = 1, 2, \dots, m \tag{3.10}$$
$$h_i(u_a + d_a) \leftarrow h_i(u_a + d_a) - X_{ia}$$

unde u_a este termenul de începere al activității $a \in A$.

Cazul ideal pentru un profil nivelat este ca toate elementele matricii H să fie zero afară de cele din prima coloană. Deci trebuie să definim un criteriu de alegere a termenelor de începere u_a astfel ca elementele lui H să fie zero sau aproape de zero.

Teoremă. Activitatea $a \in A$ se programează să înceapă la termenul $u_a \in [I_a,\ J_a]$ pentru care

$$\sum |h_i'(u_a)| - |\sum h_i(u_a)| + \sum |h_i'(u_a + d_a)| - |\sum h_i(u_a + d_a)| = \max \tag{3.11}$$

însumarea făcîndu-se pentru acei $i = 1,\ 2,\ \dots,\ m$ cu $X_{ia} \neq 0$, unde I_a, J_a sînt determinate cu relațiile (3.2), $h_i(t)$ calculate cu formulele (3.8) considerînd toate activitățile $a \in A$ și

$$h_i'(u_a) = h_i(u_a) - X_{ia} \qquad i = 1, 2, \dots, m \tag{3.12}$$
$$h_i'(u_a + d_a) = h_i(u_a + d_a) + X_{ia}$$

Demonstrație. Din relațiile (3.12) se observă că

$$h_i'(u_a) \leqslant h_i(u_a) \qquad i = 1,\ 2,\ \dots,\ m$$
$$h_i'(u_a + d_a) \geqslant h_i(u_a + d_a)$$

și există o apropiere de zero la majoritatea elementelor coloanelor matricii H prinse în (3.11)
dacă

$$\sum |h_i'(t)| \geqslant |\sum h_i(t)|$$

de unde și funcția de maximizat (3.11).

Prin această teoremă se stabilește un criteriu de alegere a termenului de începere pentru orice activitate într-un interval $[I,\ J]$ determinat prin relațiile (3.2).

Algoritmul de nivelarea resurselor (algoritm NR) constă în:

A. *Fază inițială.*

1. Se așază într-o ordine secvențială toate activitățile proiectului, fiecare primind un anumit număr de ordine. Dacă activitățile (*a*) și (*b*) au nu-

merele de ordine k_a şi k_b, (a) precede (b) şi există un drum în graf care trece prin (a) şi (b) atunci $k_a < k_b$, Acest mod de a aşeza activităţile se numeşte ordine topologică.

2. Considerăm $u_a = Q_a - d_a$ pentru fiecare activitate $a \in A$

3. Se face zero matricea H.

B. *Găsirea unei ordonanţări a proiectului.*

1. $K = 1$.

2. Se determină pentru activitatea $a \in A$ cu numărul de ordine K intervalul de timp $[I_a, J_a]$ în care poate fi programată conform formulelor (3.2).

3. Se generează un număr aleator uniform $u_a \in [I_a, J_a]$ şi se consideră u_a termenul de începere al activităţii $a \in A$.

4. Se aplică formulele (3.10) pentru activitateaa $a \in A$ în vederea formării matricii H.

5. $k \leftarrow k + 1$ şi trece la B_2

C. Procesul de nivelarea resurselor.

1. $k = 1$

2. Se determină (recalculează) pentru activitate $a \in A$ cu numărul de ordine k intervalul de timp $[I_a, J_a]$

3. Se generează un număr aleator uniform $v_a \in [I_a, J_a]$.

4. Conform criteriului (3.11) se stabileşte pentru activitatea $a \in A$ termenul de începe (u_a sau v_a) convenabil. Dacă u este stabilit ca moment de începere se trece la pasul C5), în caz contrar se fac următoarele modificări:

$$h_i(u_a) \leftarrow h_i(u_a) - X_{ia}$$

$$h_i(u_a + d_a) \leftarrow h_i(u_a + d_a) + X_{ia} \qquad i = 1, 2, \ldots, m$$

$$h_i(v_a) \leftarrow h_i(v_a) + X_{ia}$$

$$h_i(v_a + d_a) \leftarrow h_i(v_a + d_a) - X_{ia}$$

$$u_a \leftarrow v_a$$

şi se trece la pasul $C5$)

Dacă valoarea criteriului este aceeaşi pentru u_a şi v_a se alege $u_a = \min(u_a, v_a)$, eventual se fac calculele pasului 4)

5. $k \leftarrow k + 1$ şi se trece la pasul $C2$)

Se repetă etapa C de un număr N de ori sau pînă se stabilizează soluţia.

4. Descrierea algoritmului general de rezolvarea problemelor PERT cu nivelarea resurselor prin metoda simulării

În rezolvarea problemelor PERT cu nivelarea resurselor cu durate şi resurse aleatoare distingem următoarele obiective:

a) durata totală a proiectului T să fie mai mică sau egală cu durata planificată T_p.

b) uniformitatea consumului de resurse, avînd în vedere un termen final fixat, dat de durata totală a proiectului T; generînd durata şi intensi-

tăţile resurselor pentru fiecare activitate şi aplicînd algoritmul de calcul al drumului critic, obţinem o anumită ordonanţare O_k a proiectului (succesiune în timp a activităţilor).

Obiectivul *a)* se rezolvă considerînd numai acele ordonanţări $\mathbf{O} = \{0_1, 0_2, \ldots, 0_e\}$ pentru care $T_k \leqslant T_p$, unde T_k este durata totală a proiectului, corespunzător ordonanţării $0_k \in O$. Pentru fiecare odonanţare 0_k se aplică algoritmul de nivelarea resurselor stabilind pentru fiecare resursă R_i o anumită curbă $z_i^k(t)$ a profilului. Funcţie de aceste curbe $z_i^k(t)$ trebuie să definim un alt obiectiv *c)* care să precizeze ce ordonanţare 0_k trebuie aleasă. În general, acest obiectiv este specific problemei particulare. De exemplu, un astfel de obiectiv poate fi următorul:

a) Dacă $f = (f_1, f_2, \ldots, f_m)$ sînt disponibile resurselor, se alege ordonanţarea 0_k pentru care

$$E_k = \sum_{i=1}^{m} \int_1^T (z_i^k(t) - f_i(t))^2 \, dt \to \min \tag{4.1}$$

Acest obiectiv *c)* poate să fie un alt criteriu care să indice neuniformitatea profilului resurselor ca de exemplu: vîrful maxim să fie minim, abaterea faţă de medie să fie minimă, etc. deci un criteriu care să definească în mulţimea 0 o ordonanţare dominantă.

Fie $\mathbf{X}^* = (Y^{(1)}, X^{(2)})'$ un vector aleator cu $Y^{(1)} = (Y_1)$ o variabilă aleatoare lognormală şi $\mathbf{X}^{(2)} = (X_2, \ldots, X_{m+1})'$ un vector aleator normal, unde $X_1 = e^{X_1}$. Pentru o activitate $a \in A$ durata va corespunde variabilei aleatoare Y_1 şi intensităţile resurselor vectorului aleator $\mathbf{X}^2$.

Algoritmul general de rezolvarea problemelor PERT cu nivelarea resurselor prin metoda simulării se compune din următorii paşi: Iniţializare: MIN $= \infty$.

1) $i = 1$.

2) Se aplică algoritmul (GDR) pentru generarea vectorului X^* corespunzător activităţii $a_i \in A$, determinîndu-i astfel durata şi intensităţile resurselor.

3) $i \leftarrow i + 1$ şi se trece la 2) pînă la ultima activitate.

4) Se aplică paşi 2) şi 3) al algoritmului (TC) corespunzător duratelor generate mai sus. Se calculează drumul critic, termenele activităţilor şi durata proiectului T.

5) Se verifică condiţia $T \leqslant T_p$. Dacă nu se verifică se trece la 1).

6) Se aplică algoritmul (NR) pentru nivelarea resurselor prin generarea la întîmplare a termenului de începere pentru fiecare activitate. Se determină astfel pentru fiecare resursă un profil $z\ (t)$.

7) Se calculează cu (4.1) valoarea indicatorului E_k.

8) Dacă MIN $> E_k$ punem MIN $\leftarrow E_k$ şi trecem la 1)

Dacă MIN $\leqslant E_k$ trecem la 1)

Acest proces se repetă de N ori, N suficient de mare, obţinînd în final o ordonanţare „cea mai bună". Parcurgerea acestor paşi la calculatorul electronic IBM 360/40 durează în medie 2′—2′3″.

1. Anderson, T. W., (1958): *Multivariate Statistical Analysis.* John Wiley, New York, London.
2. Butler, James, W: (1956) *„Machine sampling from given probability distributions".* Symposium on Monte-Carlo pp. 249–264, Ed. by H. A. Meyer, New York, John Wiley Sous.
3. Ciobanu Gh. : (1971) *Asupra ordonanțării executării proiectelor cu alocarea resurselor"* Studii şi Cercetări de Calcul Economic şi Cibernetică Economică Nr. 2 (1971)
4. Clark, C. E. : (1961) *„The greatest of a finite set of random variables"* ORSA vol. 9 no 2 pg. 145
5. Naylor, Th., Balintey, L., Burdick, D. S., Chu Kong: *Compute Simulation Techniques.* John Wiley, York London.
6. Thomas, Gilles, (1968): *„Introduction de l'aleatoire dans les problèmes, d'ordonnancement. Méthode de simulation"* Les Méthodes de Simulation, Paris, Dunod.
7. Văduva, I. (1969): *Computer Generation of Random Variables for Queneing Problems,* Illustrated by a Machime Interference Problem. M. Sc. Thesis, University of Manchester, Institute of Science and Technology.
8. Văduva, I. (1970): *On Computer Generation of Conditional Data. Simpozionul* „Aplicațiile matematicii în ştiințele istorice şi sociale", Mamaia, septembrie 1970.
9. Wilks, S. (1962): *Mathematical Statistics.*

ПРИМЕНЕНИЕ РУЧНОГО СИМУЛИРОВАНИЯ В РАЗРЕШЕНИИ ЗАДАЧ PEPT С РЕСУРСАМИ

Краткое Зодержание

Настоящая статья трактует задачи расписания PERT со случайными длительностями деятельности и со случайными интенсивностями ресурсов, описывая процедуры симулирования на вычислительных машинах для разрешения таких задач.

В первой части статьи изучаются математические основы генерации случайных переменых и векторов отвечающих задачам PERT и приводятся соответствующие алгорифмы.

Во второй части приводятся алгорифмы для разрешения задач PERT с ресурсами и описывается создание некоторой программы симулирования.

APPLYING COMPUTER SIMULATION IN SOLVING PERT RESOURCE PROBLEMS

Summary

The paper deals with PERT scheduling problems with random durations of activities and random resource intensities, describing computer simulation procedures for solving such problems.

The first part of the paper studies the mathematical basis for generating random variables and vectors adequated to PERT problems, deriving corresponding algorithms.

The second part deals with algorithms for solving PERT-resource problems describing the organization of the resulting simulation program.

Primită la 10 XII 1971

UNIVERSITATEA BUCUREŞTI
FACULTATEA DE MATEMATICĂ-MECANICĂ
CENTRUL DE CALCUL

GENERALIZAREA METODEI LUI GALERKIN

B. ZAINEA

Metoda lui Galerkin a fost propusă de autor pentru aflarea soluţiei problemelor la limită pentru condiţii omogene, precum şi pentru determinarea valorilor proprii pentru astfel de probleme. Demonstraţia convergenţei metodei lui Galerkin de către S. G. Mihlin a fost făcută în presupunerea că funcţiile coordonate îndeplinesc condiţiile la limită. În multe ocazii, S. G. Mihlin subliniază necesitatea alegerii sistemului funcţiilor coordonate astfel încît acest sistem să satisfacă toate condiţiile la limită ale problemei.

În această lucrare ne propunem să generalizăm metoda lui Galerkin în sensul următor:

a) poate fi aplicată ecuaţiilor diferenţiale cu condiţii la limită neomogene.

b) sistemul funcţiilor coordonate se poate alege independent de condiţiile la limită ale problemei.

Ideea acestei generalizări provine din compararea metodelor Ritz şi Treftz pentru rezolvarea problemelor energetice. Metoda lui Treftz constă în: sistemul funcţiilor coordonate se alege în aşa fel încît aceasta să satisfacă exact ecuaţia dată, dar nu şi condiţiile la limită ale problemei, în timp ce metoda lui Ritz constă în alegerea sistemului funcţiilor coordonate în aşa fel încît acesta să satisfacă identic condiţiile la limită ale problemei nu însă şi ecuaţia diferenţială. Din acest punct de vedere cele două metode sînt într-un anumit sens inverse.

1. Ne propunem aflarea în domeniul Ω a soluţiei ecuaţiei

$$\mathbf{A}u = f \tag{1.1}$$

cu condiţiile la limită pe frontiera Γ a domeniului Ω

$$\mathbf{B}u = g \tag{1.2}$$

Alegem sistemul funcţiilor coordonate:

$$u_1;\ u_2;\ u_3;\ \ldots;\ u_m;\ \ldots \tag{1.3}$$

Soluţia problemei (1.1) cu condiţiile limită (1.2) o căutăm de forma:

$$\mathbf{U}^{(m)} = \sum_{k=1}^{m} C_k U_k \tag{1.4}$$

Pentru determinarea coeficienţilor C_k, vom aplica metoda lui Galerkin următoarei ecuaţii funcţionale:

$$\mathbf{C}_U = \mathrm{h}; \quad \mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B}; \quad h = f + g \tag{1.5}$$

Metoda Galerkin aplicată ecuaţiei (1.5) ne conduce la următorul sistem de ecuaţii algebrice pentru determinarea coeficienţilor:

$$\sum_{k=1}^{m} \left\{ \int_{\Omega} \mathbf{A}[u_k]\, u_q\, d\omega + \int_{\Gamma} \mathbf{B}[u_k]\, u_q\, d\sigma \right\} \mathbf{C}_k =$$

$$= \int_{\Omega} f u_q d\omega + \int_{\Gamma} g u_q \, \mathrm{d}\sigma; \quad q = 1, 2, \ldots, m \tag{1.6}$$

2. Să notăm spaţiile Hilbert legate de operatorii **A** şi **B** cu $\mathbf{H}_A$ şi $\mathbf{H}_B$. Fie două sisteme de funcţii coordonate $\{\varphi_k\}$ şi $\{\psi_k\}$ din $\mathbf{H}_A \cap \mathbf{H}_B$. Să notăm prin [,] şi (,) produsul scalar în $\mathbf{H}_A$ respectiv în $\mathbf{H}_B$.

Să înlocuim în (1.4) m cu 2m; sistemul (1.3) cu sistemele $\{\varphi_k\}$ şi $\{\psi_k\}$ şi constantele C_k în modul următor:

$$(2.1) \quad \begin{cases} u_1;\ u_2;\ \ldots;\ u_m;\ u_{m+1};\ u_{m+2};\ \ldots;\ u_{m2} \\ \varphi_1;\ \varphi_2;\ \ldots;\ \varphi_m;\ \psi_1;\ \psi_2;\ \ldots;\ \psi_m \end{cases}$$

$$(2.2) \quad \begin{cases} C_1;\ C_2;\ \ldots;\ C_m;\ C_{m+1};\ C_{m+2};\ \ldots;\ C_{2m} \\ \alpha_1;\ \alpha_2;\ \ldots;\ \alpha_m;\ \beta_1;\ \beta_2;\ \ldots;\ \beta_m \end{cases}$$

Soluţia (1.4) precum şi sistemul algebric (1.6) vor fi de forma:

$$u^{(2m)} = \sum_{k=1}^{2m} C_k u_k \tag{2.3}$$

$$\sum_{k=1}^{2m} \{[\mathbf{A}u_k,\ u_q] + (\mathbf{B}u_k,\ u_q)\}\ C_k = [f,\ u_q] + (g,\ u_q)\ q = 1, 2, \ldots, m, \ldots, 2m \tag{2.4}$$

Avînd în vedere (2.2) sistemul (2.4) devine:

$$\sum_{k=1}^{m} \{[\mathbf{A}u_k,\ u_q] + (\mathbf{B}u_k,\ u_q)\}\ \alpha_k + \sum_{k=m+1}^{2m} \{[\mathbf{A}u_k,\ u_q)] + (\mathbf{B}u_k,\ u_q)\}\ \beta_{k-m} =$$

$$= [f,\ u_q] + (g,\ u_q)\ q = 1,\ 2,\ \ldots,\ m,\ \ldots,\ 2\mathrm{m}. \tag{2.5}$$

Dacă avem în vedere (2.1) sistemul algebric (2.5) devine:

$$\sum_{k=1}^{m} \{[\mathbf{A}\varphi_k,\ u_q] + (\mathbf{B}\varphi_k,\ u_q)\}\ \alpha_k +$$

$$+ \sum_{k=1}^{m} \{[\mathbf{A}\psi_k,\ u_q] + (\mathbf{B}\psi_k,\ u_q)\}\ \beta_k = [f,\ u_q] + (g,\ u_q)$$

$$q = 1,\ 2,\ \ldots,\ m,\ \ldots,\ 2m \tag{2.6}$$

Dacă în sistemul (2.6) înlocuim pe u_q ca în notația (2.1), acesta devine:

$$\sum_{k=1}^{m} \{\mathbf{A}\varphi_k, \varphi_q] + (\mathbf{B}\varphi k, \varphi_q)\} \alpha_k + \sum_{k=1}^{m} \{[\mathbf{A}\psi_k, \varphi_q] + (\mathbf{B}\psi_k, \varphi_q)\} \beta_k =$$

$$= [f, \varphi_q] + (g, \varphi_q); \; q = 1, 2, \dots, \mathrm{m} \tag{2.7}$$

$$\sum_{k=1}^{m} \{[\mathbf{A}\varphi_k, \psi_q] + (B\varphi_k, \psi_q)\} \alpha_k + \sum_{k=1}^{m} [\mathbf{A}\psi_k, \psi_q] + (\mathbf{B}\psi_k, \psi_q)\} \beta_k =$$

$$= [f, \psi_q] + (g, \psi_q); \; q = 1, 2, \dots, m$$

Sistemul algebric (2.7) pentru determinarea coeficienților $\{\alpha_k\}$ și $\{\beta_k\}$; $k = 1, 2, \dots, m$ care rezultă din aplicarea metodei lui Galerkin ecuației funcționale (1.5) reprezintă:

I) în ipoteza că $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m$ satisface identic condițiile la limită (1.2) presupuse omogene, deci $\mathbf{B}\varphi_k \equiv 0$; $g \equiv 0$ și $2m$ este înlocuit cu m, deci $\psi_k \equiv 0$

$$\sum_{k=1}^{m} [\mathbf{A}\varphi_k, \varphi_q)] \alpha_k = [f, \varphi_q]; \; q = 1, 2, \dots, m \tag{2.8}$$

Acest sistem coincide cu „sistemul de ecuații algebrice Galerkin" [1]*.

II) Dacă ipotezelor de la I) adăugăm și ipoteza: operatorul diferențial **A** este pozitiv definit și autoconjugat, sistemul (2.7) devenit (2.8) coincide cu „sistemul de ecuații algebrice Ritz" [1]. **

III) Să presupunem că $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_m$ satisface identic ecuația (1.1) presupusă omogenă, $f \equiv 0$; dar nu satisface condițiile la limită (1.2). Înlocuind 2m cu m, deci $\varphi_k \equiv 0$, sistemul (2.7) devine:

$$\sum_{k=1}^{m} (\mathbf{B}\psi_k, \psi_q) \beta_k = (g, \psi_q); \; q = 1, 2, \dots, \mathrm{m} \tag{2.9}$$

Sistemul (2.9) coincide cu „sistemul lui Treftz, [1] ***

Sistemul (2 7) obținut prin aplicarea metodei Galerkin ecuației funcționale (1.5) cuprinde drept cazuri particulare sistemele cunoscute „Galerkin" „Ritz"; „Treftz"

Vom înțelege prin „generalizarea metodei lui Galerkin", aplicarea metodei Galerkin ecuației funcționale (1.5) Aceasta conduce la sistemul (2.7) care conține sistemele „Galerkin"; „Ritz"; „Treftz"

Sistemul (2.7) devine:

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^{m} a_{kq}\alpha_k + \sum_{k=1}^{m} b_{kq}\beta_k = \gamma_q \\ &\sum_{k=1}^{m} C_{kq}\alpha_k + \sum_{k=1}^{m} d_{kq}\beta_k = \delta_q \quad q = 1, 2, \dots, m \end{aligned} \tag{2.10}$$

*) Pag. 277
**) Pag. 125
***) Pag. 188

unde am notat:

$$[\mathbf{A}\varphi_k, \varphi_q] + (\mathbf{B}\varphi_k, \varphi_q) = a_{kq}; [\mathbf{A}\psi_k, \varphi_q] + (\mathbf{B}\psi_k, \varphi_q) = b_{kq}$$
$$[\mathbf{A}\varphi_k, \psi_q] + (\mathbf{B}\varphi_k, \psi_q) = C_{kq}; [\mathbf{A}\psi_k, \psi_q] + (\mathbf{B}\psi_k, \psi_q) = d_{kq} \tag{2.11}$$
$$[f, \varphi_q] + (g, \varphi_q) = \gamma_q; [f, \psi_q] + (g, \psi_q) = \delta_q$$

Calculele de pînă acum vor fi justificate și fondate teoretic în cele ce urmează:

3. Ne propunem aplicarea metodei generalizate Galerkin unei ecuații diferențiale. Fie în spațiul n dimensional domeniului Ω mărginită de frontiera Γ netedă pe porțiuni. În Ω studiem ecuația de tip eliptic:

$$\mathbf{A}u = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_k}\left(a_{jk}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) - \sum_{k=1}^{n} b_k \frac{\partial u}{\partial x_k} + Cu = f(x) \tag{3.1}$$

unde $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \Omega$, iar pe Γ soluția trebuie să satisfacă condițiile la limită:

$$\mathbf{B}u = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \mathrm{Cos}(\nu, x_k)\, a_{jk}\frac{\partial u}{\partial x_j} - \gamma u = g\ (\overline{x});\ \overline{x} \in \Gamma \tag{3.2}$$

Vom presupune că:

a) $a_{jk}^{(x)}$ și derivatele lor parțiale precum și funcțiunile $b_k^{(x)}$ și $c\ (x)$ sînt continui în $\overline{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$ iar funcțiunea $\gamma(x)$ este mărginită pe Γ

b) forma pătratică $\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{jk}\xi_j\xi_k$ este pozitiv definită pe $\overline{\Omega}$

c) problema (3.1) cu condiția (3.2) are soluție unică u_0

Urmînd pe M. I. Vișik [2] * studiem două spații Hilbert $\mathbf{H}_1$ și $\mathbf{H}_2$. Spațiul $\mathbf{H}_1$ este format din funcții $\in \mathbf{L}_2\ (\Omega)$ care au derivate parțiale generalizate de primul ordin.

Produsul scalar în $\mathbf{H}_1$ îl definim după relația:

$$(u, v) = \int_\Omega \left[\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{jk}\frac{\partial u}{\partial x_k}\frac{\partial u}{\partial x_j} + uv\right] d\omega;\ u, v, \in \mathbf{H}_1 \tag{3.3}$$

Norma unui element din H_1 este definită de egalitatea:

$$\| u \|^2 = \int_\Omega \left[\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)^2 + u^2\right] d\omega;\ u \in \mathbf{H}_1 \tag{3.4}$$

Prin spațiul Hilbert $\mathbf{H}_2$ vom înțelege suma ortogonală a spațiilor $\mathbf{L}_2(\Omega)$ și $\mathbf{L}_2(\Gamma)$. Elementele din $\mathbf{H}_2$ vor fi elementele de forma: $\{f(x);\ g(\overline{x})\}$; $f(x) \in \mathbf{L}_2(\Omega)$; $g(\overline{x}) \in \mathbf{L}_2(\Gamma)$. Produsul scalar în $\mathbf{H}_2$ se definește după formula:

$$[\{f;\ \varphi\}, \{g;\ \psi\}] = \int_\Omega f\varphi\, d\omega + \int_\Gamma g\psi\, d\sigma \tag{3.5}$$

*) Pag. 51—148

Fie doi operatori **L** și **T** dați în $\mathbf{H}_1$ care au domeniul valorilor în $\mathbf{H}_2$. Operatorul **L** îl definim pe mulțimea $\mathbf{D}_L$ a tuturor funcțiilor din $\mathbf{H}_1$, care au derivate parțiale generalizate de ordinul doi și care aparțin lui $\mathbf{L}_2(\Omega)$ după formula:

$$L[u] = -\left\{\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{u}\frac{\partial}{\partial x_k}\left(a_{kj}\frac{\partial u}{ux_j}\right) - u;\ \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\mathrm{Cos}(\gamma\nu\ x_k)\ a_{jk}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right\} \tag{3.6}$$

Definim operatorul **T** pe întreg spațiul $\mathbf{H}_1$ prin egalitatea:

$$\mathbf{T}[u] = \sum_{k=1}^{n} b_k \frac{\partial u}{\partial x_k} - (1 + c)\ u;\ \gamma u \tag{3.7}$$

Avînd în vedere relațiile (3.1) și (3.2) obținem:

$$\mathbf{L}[u] + \mathbf{T}[u] = -\{\mathbf{A}[u];\ \mathbf{B}[u]\} \tag{3.8}$$

Problema (3.1) cu condițiile (3.2) se reduce la rezolvarea următoarei ecuații funcționale, analoagă ecuației (1.5):

$$\mathbf{L}[u] + \mathbf{T}[u] = -\{f(x);\ g(\overline{x})\} \tag{3.9}$$

Din [3] rezultă că operatorul **T** este mărginit în $\mathbf{H}_1$. Pentru a stabili anumite proprietăți ale operatorului **L**, introducem un operator **W** de scufundare a spațiului $\mathbf{H}_1$ în $\mathbf{H}_2$ definit astfel:

$$\mathbf{W}[u] = \{u(x);\ u(\overline{x})\};\ u \in \mathbf{H}_1 \tag{3.10}$$

Conform unei teoreme a lui S.L. Sobolev, dacă $u \in \mathbf{H}_1$, atunci $u(\overline{x}) \in \mathbf{L}_2(\Omega)$; $u(\overline{x}) \in \mathbf{L}_2(\Gamma)$ și deci $\{u(x);\ u(\overline{x})\} \in \mathbf{H}_2$

Tot din [3] rezultă că operatorul **L** are un invers $\mathbf{L}^{-1}$ care coincide cu operatorul conjugat operatorului **W**.

$$\mathbf{L}^{-1}[\{f;\ g\}] = \mathbf{W}^*[\{g;\ f\}] \tag{3.11}$$

Operatorii $\mathbf{L}^{-1}$ și $\mathbf{W}^*$ au domeniul valorilor în $\mathbf{H}_1$ și cu valori în $\mathbf{H}_2$. Operatorii $\mathbf{L}^{-1} \equiv \mathbf{W}^*$ sînt operatori absolut continui. Aplicînd ecuația funcționale (3.8) operatorul $\mathbf{L}^{-1}$ obținem :

$$u + \mathbf{L}^{-1}\mathbf{T}[u] = -\mathbf{L}^{-1}[\{f;\ g\}] \tag{3.12}$$

Operatorul $\mathbf{L}^{-1}\mathbf{T}$ este de asemenea absolut continuu, deoarece $\mathbf{L}^{-1}$ este absolut continuu și **T** este mărginit în $\mathbf{H}_1$. Sîntem în unul din cazurile de convergență a metodei lui Galerkin [1]*. Aplicînd metoda Galerkin ecuației (3.12) sîntem conduși la următorul sistem de ecuații algebrice pentru determinarea coeficienților C_k:

$$-\sum_{k=1}^{m}[u_k + \mathbf{L}^{-1}\mathbf{T}[u_k],\ u_q]c_k = [\mathbf{L}^{-1}[\{f;\ g\}],\ u_q] \tag{3.13}$$

unde $q = 1, 2, \ldots, m$ iar [,] înseamnă produsul scalar în $\mathbf{H}_2$

*) Pag. 309

Să arătăm că sistemul (3.13) coincide cu sistemul (1.6). În adevăr, dacă $\{u_k\} \in \mathbf{D}_L$, datorită relațiilor (3.8) și (3.10), vom avea:

$$-[u_k + \mathbf{L}^{-1}\mathbf{T}[u_k],\ u_q] = -[\mathbf{L}^{-1}\mathbf{L}[u_k] + \mathbf{L}^{-1}\mathbf{T}[u_k]\ u_q] =$$

$$= -[W^*\mathbf{L}[u_k] + \mathbf{W}^*\mathbf{T}[u_k],\ u_q] = -[\mathbf{L}[u_k] + \mathbf{T}[u_k],\ \mathbf{W}[u_q]] =$$

$$= \{[\mathbf{A}[u_k], \mathbf{B}[u_k]];\ [u_q,\ u_q]\} = \int_\Omega \mathbf{A}[u_k]\, u_q\, d\omega + \int_\Gamma \mathbf{B}[u_k]\, u_q\, d\sigma$$

Vom avea de asemenea și pentru membrul drept:

$$[\mathbf{L}^{-1}[\{f;\ g\}],\ u_q] = [\mathbf{W}^*[\{f;\ g\}],\ u_q] = [\{f;\ g\},\ \mathbf{W}[u_q]\} =$$

$$= [\{f;\ g\},\ \{u_q,\ u_q\}] = \int_\Omega f u_q\, d\omega + \int_\Gamma g u_q\, d\sigma$$

Sistemul algebric (3.13) coincide cu sistemul (1.6). Sistemul (1.6) determină coeficienții C_k astfel că pentru m suficient de mare soluția $u^{(m)}$ dată de (1.4) converge către u_0 în sensul convergenței din spațiul $\mathbf{H}_1$. Am obținut teorema:

Dacă problema la limită (3.1) cu condițiile (3.2) are o soluție unică u_0, atunc8 sistemul (1.6) are pentru m suficient de mare, soluții diferite de zero Funcțiunile $u^{(m)}_{(x)}$ date de (1.4) converg către funcție $u_0\ (x)$

BIBLIOGRAFIE

1. С. Г. МИХЛИН. *Прямые методы в математической физике.* Москва 1950
2. М. И. ВИШИК. *Задача Коши для уравнений с операторными коэффициентами, смешанная краевая задача для систем дифференциальных уравнений и приближенный метод их решения.* Матем. сб. 39/81/: 1 (1956)
3. М. И. ВИШИК. Д.А.Н. 81, 5, 1951.

ОБОБЕНИЕ МЕТОДА ГАЛЕРКИНА

Краткое содержание

Метод Галеркина был предложен автором с целью находа решения задач с однородными пределами.

Демонстрирование сходимости метода, данного С.Г. Михлимын, было сделано, предполагая, что система функций координат удовлетворяет предельным условиям задачи.

В работе обобщается метод Галеркина в следующем смысле:

— может быть применен к неоднородным задачам при пределе;

— система координатных функций выбирается независимо от условий при пределе;

— это обобщение содержит в качестве частных случаев методы Ритца и Трефца;

— действительность этого обобщения может быть проведена на дифференциальном уравнении эллиптического типа.

LA GÉNÉRALISATION DE LA MÉTHODE DE GALERKINE

Rézumé

Cette méthode a été proposée par l'auteur en vue de résoudre les problèmes à limite homogène.

La démonstration de la convergeance de la méthode effectuée par S. G. Mihlin est basée sur la supposition que le système des fonctions coordonnées vérifie d'une manière identique les conditions-limite du problème.

Le prsent ouvrage généralise la méthode de Galerkine de la manière suivante:

— celle-ci peut être appliquée aux problèmes à limite non-homogène.

— le systè, e des fonctions coordonnées est considéré chiosi indépendemment des conditions-limite du problème.

— cette généralisation comprend comme cas spéciaux particuliers les méthodes Ritz et Trefftz

— on fait la démonstration de cette généralisation au moyen d'une equation différentielle du type éliptique.

PRIMITĂ LA 15 XII 1971

INSTITUTUL DE CONSTRUCŢII
BUCUREŞTI

CONSTRUCȚII DE ȘIRURI DE NUMERE PSEUDOALEATOARE CORELATE, URMÎND FUNCȚII DE REPARTIȚIE DATE.

D. ZORILESCU

În lucrare se propun metode pentru construirea de șiruri de numere pseudoaleatoare corelate, urmînd legi de repartiție cunoscute.

Se propun aceste metode în locul calculului regresiilor.

După indicarea unui procedeu general se descriu amănunțit procedeele de construire a șirurilor de numere pseudoaleatoare corelate, cu legi de repartiție normală și lognormală.

Modelul general

Considerăm două variabile aleatoare x și y cu funcții de repartiții cunoscute respectiv $F(x)$ și $G(y)$ și corelate cu o intensitate de corelație ρ.

Presupunem că cunoaștem un șir de realizări particulare $\{x_n\}_{n \in N^*}$ ale variabilei aleatoare x sau că am generat un astfel de șir cu ajutorul unei tabele de numere aleatoare.

Procedeul de generare a șirurilor de numere aleatoare urmînd repartiții date este cunoscut.

Se folosește un șir de numere aleatoare $\{u_n\}_{n \in N^*}$ uniform repartizate pe (0,1), iar x_n se determină din relația

$$x_n = F^{-1}(u_n).$$

Pentru generarea unui șir de numere aleatoare $\{y_n\}_{n \in N^*}$, urmînd legea de repartiție $G(y)$, și corelat cu șirul $\{x_n\}_{n \in N^*}$ construit anterior, vom folosi o nouă variabilă aleatoare

$$Z = T(X, Y)$$

unde $T(X, Y)$ este o funcție de variabilele aleatoare X și Y, funcție ce presupunem că admite inversă în raport cu y, adică $T^1(X, Z)$.

Presupunem, de asemenea că se poate determina legea de repartiție $H(z)$ a variabilei aleatoare Z.

În acest caz vom putea genera, după procedeul obișnuit, un șir de numere $\{z_m\}_{m \in N^*}$ cu funcția de repartiție $H(z)$.

Fie $\{U_m\}_{m \in N^*}$ un șir de numere aleatoare uniform repartizate pe (0,1).

Valorile șirului $\{z_m\}_{m \in N^*}$ se determină prin inversarea relației

$$U'_m = H(z_m) = P(Z < z_m),$$

adică

$$z_m = H^{-1}(U'_m).$$

Se observă că putem scrie

$$U'_m = P(Z < Z_m) = P[T(x, y) < H^{-1}(U'_m)]$$

ceea ce este acelaşi lucru cu

$$U'_m = P[y < T^{-1}(H^{-1}(U'_m), X)]$$

şi prin urmare

$$Y_m = T^{-1}(H^{-1}(U'_m), X) \tag{1}$$

Se observă că pentru fiecare valoare x a variabilei aleatoare X se generează m valori y_m.

Dacă $Z = X + Y$, adică funcţia $T(X, Y)$ este liniară în raport cu X şi Y, atunci pentru fiecare valoare $x_q \in x\{_n\}_{n \in N^*}$ vom genera un şir de numere $\{y_{mq}\}_{m \in N^*}$ de forma

$$y_{mq} = H^{-1}(U'_m) - xq \text{ pentru orice } m \in N^*. \tag{2}$$

Valoarea medie a şirului $\{y_{mp}\}_{m \in N^*}$, adică $E(y_{mq})$ este tocmai valoarea medie a variabilei Y pentru o valoare dată a variabilei $X(X = x_q)$, adică

$$E(Y/X)_{X = x_q}.$$

Se obţin prin acest procedeu valorile regresiei lui Y asupra lui X fără a fi necesar să se determine în prealabil liniile de regresie corespunzătoare.

În multe probleme practice este imposibil de estimat astfel de linii de regresie, iar cînd acest lucru este posibil, rezultatele sînt afectate de erori destul de semnificative.

Trebuie observat de asemenică valorile medii ale variabilei aleatoare Y determinate cu ajutorul liniei de regresie pentru valori date ale variabilei X, depind în mare măsură de tipul funcţiei cu care s-a aproximat regresia empirică.

În plus trebuie să ţinem seama şi de faptul că prin procedeul de simulare *) indicat aici, obţinem şiruri oricît de mari de numere $\{y_{mq}\}_{m, q \in N^*}$ asociate fiecărui x_q dat, şi deci medii $E(y_{m_2})$ mult mai corecte, calculate pe baza unei mulţimi mai mari de date.

Să arătăm acum că media şi varianţa şirului $\{y_{mq}\}_{m, q \in N^*}$, construit astfel este tocmai media şi varianţa variabilei Y (notate m_y şi σ_y^2).

Astfel, aplicînd operatorul medie, pentru orice m şi q, relaţiei (2), se obţine

$$E(y_{mq}) = E(z_m) - E(x_q) = m_x + m_y - m_x = m_y$$

*) Am folosit cuvîntul simulare deoarece tehnica descrisă constituie un procedeu de simulare a unor şiruri pseudoaleatoare, cu proprietăţi fixate.

Variația șirului va fi

$$D^2(y_{mq}) = D^2(z_m - x_q) = E[(Z_m - x_q - m_y)^2] = E[(y_{mq} + x_q - x_q - m_y)^2] =$$
$$= E[(y_{mq} - m_y)^2] = \sigma_y^2$$

2. Cazul repartițiilor normale

Fie X și Y două variabile aleatoare avînd funcții de repartiție normală: $N(m_x, \sigma_x)$ și $N(m_y \cdot \sigma_y)$ și o intensitate de corelație

$$\rho = \frac{E[(X - m_x)(Y - m_y)]}{\sigma_x \cdot \sigma_y}.$$

Presupunem că cunoaștem un șir de realizări particulare $\{x_n\}_{n \in N^*}$ ale variabilei aleatoare X sau că am construit cu ajutorul tabelei de numere aleatoare acest șir.

În ultimul caz valorile șirului $\{x_n\}_{n \in N^*}$ se află după tehnica metodei numerelor aleatoare din relația

$$x_n = \sigma_x V_n + m_x. \tag{3}$$

Șirul $\{V_n\}_{n \in N^*}$ este un șir de numere aleatoare repartizate N (0,1) care verifică relația

$$\Phi(V_n) = U_n - \frac{1}{2} \quad n \in N^* \tag{4}$$

în care Φ este funcția tabelată a lui Laplace, iar $\{U_n\}_{n \in N^*}$ un șir de numere aleatoare uniform repartizate pe (0,1).

Ne propunem să construim un șir de realizări particulare $\{y_n\}_{n \in N^*}$ ale variabilei Y repartizată $N(m_y, \sigma_y)$ și care să se afle în corelație cu șirul $\{x_n\}_{n \in N^*}$, cu o intensitate de corelație dată ρ.

Fie variabila aleatoare

$Z = X + Y$ care va avea o lege de repartiție de asemeni normală. (5)

Vom calcula media și varianta sa.

$$m_z = E(Z) = E(X) + E(Y) = m_x + m_y \tag{6}$$

$$\partial_z^2 = D^2(Z) = D^2(X + Y) = \sigma_x^2 + \sigma_y^2 + 2\rho\, \sigma_x \sigma_y \tag{7}$$

Prin urmare variabila aleatoare Z urmează o lege de repartiție $N(m_z, \sigma_z)$.

Ca și în cazul construirii șirului $\{x_n\}_{n \in N^*}$ șirul $\{z_m\}_{m \in N^*}$, de realizări particulare a variabilei Z, se determină cu ajutorul relației

$$z_m = \partial_z V'_m + m_z \tag{8}$$

în care $\{V'_m\}$ este un șir de numere aleatoare repartizate N (0,1) și care verifică relația

$$\Phi(V'_m) = U'_m - \frac{1}{2}; \quad n \in N^*. \tag{9}$$

Șirul $\{z_m\}_{m \in N^*}$ face să corespundă la fiecare x_q din șirul $\{x_n\}_{n \in N^*}$ un șir de numere asociate $\{y_{mq}\}_{m \in N^*}$ obținute cu ajutorul relației

$$y_{mq} = z_m - x_q = \sigma_z V'_m + m_z - x_q. \tag{10}$$

Ținînd seama de relațiile (6), (7) și (8) obținem

$$y_{mq} = (\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + 2\rho\sigma_x \sigma_y)^{1/2} V'_m + m_x + m_y - x_q. \tag{11}$$

Relația (11) va produce, prin urmare, pentru fiecare termen x_q al șirului $\{x_n\}_{n \in N^*}$ un șir de valori $\{y_{mq}\}_{mq \in N^*}$ corespunzător șirului $\{V'_m\}_{m \in N^*}$ de numere aleatoare N (0,1) care verifică relația (9).

Valoarea medie a șirului $\{y_{mq}\}$ efectuată după m, va da valoarea regresiei variabilei Y asupra variabilei X pentru un x_q dat,

$$E\ (Y/X)_{x = x_q} = m_x + m_y - x_q$$

deoarece $E\ (V'_m) = 0$ prin construcție.

Se observă imediat că valoarea medie a șirului y_{mq} efectuată după m și q va fi tocmai m_y.

3. Cazul repartiției lognormale

3.1. *Vom construi mai întîi șiruri aleatoare lognormale*

A determina șirul $(y_n)_{n \in N^*}$ cu repartiție lognormală, înseamnă a determina șirul $(\ln y_n)_{n \in N^*}$ cu repartiție normală.

Notăm

$$Z_n = \ln y_n. \tag{12}$$

Prin urmare trebuie să determinăm un șir $(Z_n)_{n \in N^*}$ care urmează o re. partiție normală $N(\mu = \ln \gamma, \sigma_{ln})$ unde $\mu = \ln \gamma$ și σ_{ln} se dau dinainte-

În lucrarea (8), am descris pe larg legea de repartiție lognormală, unele probleme de simulare, precum și un procedeu de construire a șirurilor de numere aleatoare urmînd această lege de repartiție cu importante aplicații în practică și în special în studiul fenomenelor naturale și sociale.

În lucrările (9) și (10) sînt obținute modele de interpretare și prelucrare a observațiilor cîmpurilor potențiale cu ajutorul metodei numerelor aleatoare.

Formăm mai întîi un șir $(U_n)_{n \in N^*}$ cu repartiția N (0,1).

Valorile U_n se vor obține din relația:

$$\Phi(U_n) = x_n - \frac{1}{2} \tag{13}$$

unde $\Phi(U_n)$ este funcția lui Laplace.

Transformarea

$$z_n = \sigma_{ln} U_n + \mu, \quad n \in N^* \tag{14}$$

va da naştere şirului $(Z_n)_{n \in N^*}$ repartizat $N(\mu, \sigma_{ln})$.

Valorile şirului $(y_n)_{n \in N^*}$ se obţin din relaţia

$$\ln y_n = \sigma_{ln} U_n + \mu$$

adică

$$y_n = e^{\sigma_{ln} U_n + \mu} \tag{15}$$

Cum $\mu = ln\ \gamma$, se găseşte

$$y_n = \gamma\, e^{U_n \sigma_{ln}}. \tag{16}$$

Prin urmare dîndu-se γ şi σ_{ln}, după determinarea unui şir de numere aleatoare $(U_n)_{n \in N^*}$ repartizate $N(0,1)$, se poate determina cu relaţia precedentă un şir de numere aleatoare $(y_n)_{n \in N^*}$ cu repartiţie lognormală cu parametri:

$$m = \gamma e^{\sigma^2_{ln}/2} \tag{17}$$

$$\sigma^2 = m^2(e^{\sigma^2_{ln}} - 1) \tag{18}$$

Cu aceste rezultate obţinute se poate da următorul enunţ:

Termenii unui şir $(y_n)_{n \in N^*}$ de numere aleatoare, ce caracterizează o variabilă aleatoare lognormală a cărei repartiţie are parametrii m şi σ, se determină cu ajutorul relaţiei (16) unde U_n sînt valorile unui şir $(U_n)_{n \in N^*}$ de numere aleatoare repartizate N (0,1) iar γ şi σ_{ln} rezultă din media şi dispersia variabilei aleatoare lognormale (17) şi (18) adică

$$\gamma = m^2 / \sqrt{\sigma^2 + m^2} \tag{19}$$

$$\sigma^2_{ln} = \ln \frac{\sigma^2 + m^2}{m^2} = 2\, ln \frac{m}{\gamma} \tag{20}$$

3.2. *Construcţii de şiruri de numere aleatoare lognormale corelate cu o intensitate de corelaţie dată r.*

Intensitatea corelaţiei a două şiruri de numere aleatoare lognormale $\{x_n\}_{n \in N^*}$ şi $\{y_n\}_{n \in N^*}$ este estimată cu ajutorul coeficientului de corelaţie:

$$r = \frac{\sum\limits_{n \in N^*} (l_n x_n - l_n \gamma_x)(l_n y_n - l_n \gamma_y)}{n \cdot \sigma_{lnx}\, \sigma_{lny}} \tag{21}$$

unde $ln\ \gamma_x$; $ln\ \gamma_y$ şi σ^2_{lnx}; σ^2_{lny} sînt respectiv mediile şi dispersiile şirurilor de numere $\{ln\ x_n\}$ şi $\{ln\ y_n\}$.

Valorile γ_x; γ_y; σ^2_{lnx}; σ^2_{lny} se determină din parametrii daţi ai repartiţiilor lognormale m_x, m_y, σ^2_x, σ^2_y cu ajutorul unor relaţii de tipul (19) şi (20).

Dacă presupunem că în conformitate cu procedeul descris la punctul 3.1, şirurile de numere aleatoare lognormale $\{x_n\}_{n \in N^*}$ şi $\{y_n\}_{n \in N^*}$, se construiesc cu ajutorul unui singur şir $\{U_n\}_{n \in N^*}$ de numere aleatoare repartizate N (0,1), se obţin următoarele relaţii:

$$x_n = \gamma_x \, e^{U_n \sigma_{lnx}} \tag{22}$$

$$y_n = \gamma_y \, e^{U_n \sigma_{lny}} \tag{23}$$

Logaritmînd relaţiile (22) şi (23) se obţin formulele

$$ln \, x_n = ln \, \gamma_x + U_x \, \sigma_{lnx} \tag{24}$$

$$ln \, y_n = ln \, \gamma_y + U_n \, \sigma_{lny} \tag{25}$$

care înlocuite în expresia coeficientului de corelaţie dau

$$r = \frac{\sum\limits_{n \in N^*} (U_n \sigma_{lnx}) (U_n \sigma_{lny})}{n \cdot \sigma_{lnx} \, \sigma_{lny}}$$

sau

$$r = \frac{1}{n} \sum_{n \in N^*} U_n^2 = 1 \tag{26}$$

deoarece şirul $\{U_n\}_{n \in N^*}$ are relaţia N (0,1).

Prin urmare două şiruri de numere aleatoare lognormale construite cu ajutorul unui singur şir aleator N (0,1) sînt corelate cu un coeficient de corelaţie egal cu 1.

Aceasta înseamnă că între şirurile de numere aleatoare lognormale, construite, există o legătură liniară de forma

$$ln \, y_n - ln \, \gamma_n = \pm \frac{\sigma_{lny}}{\sigma_{lnx}} (ln \, x_n - ln \, \gamma_x)$$

sau

$$y_n = \gamma_y \left(\frac{x_n}{\gamma_x} \right)^{\pm \frac{\sigma_{lny}}{\sigma_{lnx}}} . \tag{27}$$

Presupunerea acum că vom construi şirul $\{x_n\}_{n \in N^*}$ cu ajutorul şirului $\{U_n\}_{n \in N^*}$ iar şirul $\{y_n\}_{n \in N^*}$ cu ajutorul şirului $\{U'_n\}_{n \in N^*}$, ambele şiruri fiind normale N (0,1). Un calcul analog indică

$$r = \frac{\sum\limits_{n \in N^*} U_n U'_n}{n} . \tag{28}$$

Se observă că relaţia (28) este tocmai coeficientul de corelaţie al şirurilor de numere aleatoare $\{U_n\}_{n \in N^*}$ şi $\{U_n\}_{n \in N^*}$, ambele repartizate N (0,1).

Putem enunța acum următoarea propoziție:

Condiția necesară și suficientă pentru a construi două șiruri de numere aleatoare repartizate lognormal și corelate cu o intensitate a corelației dată r, este ca șirurile de numere aleatoare, ajutătoare, repartizate N (0,1) să fie ele înșile corelate cu coeficientul de corelație r. Cele două șiruri N (0,1), corelate, se construiesc după metodologia propusă în capitolul 2.

3.3. *Un alt procedeu de construire a șirurilor de numere aleatoare lognormale, corelate.*

Fie X și Y două variabile aleatoare lognormale, adică variabilele log X și log Y sînt repartizate:

$$N(\log \gamma_x;\ \sigma_{\log x});\ N(\log \gamma_y;\ \sigma_{\log y})$$

și $\{x_n\}_{n\in N^*}$ și $\{y_n\}_{n\in N^*}$ două șiruri de realizări particulare ale variabilelor aleatoare lognormale. Fie r coeficientul de corelație al variabilelor log. X și log. Y dat de relația (21)

Notăm

$$Z = XY \tag{29}$$

sau $\log Z = \log X + \log Y$.

Rezultă că log Z urmează o repartiție normală, deci Z, lognormală cu

$$\log \gamma_z = E(\log Z) = E(\log x) + E(\log y) = \log \gamma_x + \log \gamma_y$$

sau

$$\gamma_z = \gamma_x \gamma_y$$

și

$$\sigma^2_{\log z} = E[(\log Z - \log \gamma_Z)^2] = E[(\log X - \log \gamma_X)^2] + E[(\log Y - \log.\ \gamma_Y)^2] + \\ + 2\,E[(\log X - \log \gamma_X)\,(\log Y - \log \gamma_Y)]$$

adică

$$\sigma^2_{\log Z} = \sigma^2_{\log X} + \sigma^2_{\log Y} + 2r\,\sigma_{\log X}\,\sigma_{\log Y}$$

Prin urmare am redus problema la cazul (2.2)

Analogul formulei (11) va fi

$$\log y_{mq} = (\sigma^2_{\log x} + \sigma^2_{\log y} + 2r\,\sigma_{\log x}\,\sigma_{\log y})^{1/2}\,U_n + \log \gamma_x + \log \gamma_y - \log \gamma_q$$

sau

$$y_{mq} = \frac{\gamma_x \gamma_y}{x_q}\,exp\,\frac{(\sigma^2_{\log x} + \sigma^2_{\log y} + 2r\,\sigma_{\log x}\,\sigma_{\log y})^{1/2} V'_m}{\log e} \tag{3}$$

unde $\{V'_m\}_{m\in N^*}$ este un șir de numere aleatoare N (0,1) și care verifică relația

$$\Phi(V'_m) = U'_m - \frac{1}{2},\quad m \in N^*$$

cu Φ, funcția lui Laplace.

După un calcul simplu se pot determina și formulele mediei și varianței variabilei aleatoare lognormale Z rezultată din produsul a două variabile aleatoare lognormale X și Y, corelate cu o intensitate de corelație r.

Se ține seama că:

$$m_z = m_{xy} = \gamma_z e^{\sigma^2_{lnz}/2} \tag{31}$$

$$\sigma^2_z = \sigma^2_{xy} = m^2_{xy}(e^{\sigma^2_{lnz}} - 1) \tag{32}$$

Se obține în final

$$m_{xy} = \gamma_x \gamma_y \, exp \; \frac{\sigma^2_{\log x}\sigma^2_{\log y} + 2\, r\sigma_{\log x}\sigma_{\log y}}{2 \log^2 e} \tag{33}$$

și

$$\sigma^2_{xy} = m^2_{xy}\left[\exp \frac{1}{\log^2 e}(\sigma^2_{\log x} + \sigma^2_{\log y} + 2r\, \sigma_{\log x}\, \sigma_{\log y}) - 1\right]. \tag{34}$$

BIBLIOGRAFIE

1. Granino A. Korn, *Random-Process Simultation and Measurements*, SUA, 1966.
2. Hammersley J. M., Handscomb D. C., *Monte Carlo Methods*, Londra 1964.
3. Metropolis N., Ulam S., *The Monte Carlo Method*. J. Amer. Statist. Assoc., 1949 44, 335–341.
4. Mihoc Gh., *Sur l'application de la méthode Monte Carlo aux processus pour apprendre*. Rev. Math. pures et appl. 1963, 8, 337–347.
5. Onicescu O., *Nombres et systèmes aléatoires București – Paris*, 1964.
6. Stoka M., Theodorescu R., *Probabilitate și Geometrie*. Ed. Științifică, București, 1966.
7. Vielledent L., Tincelin E., *Principes et mis en oeuvre de procédés de simulation (Méthode de Monte Carlo)*. Revue de l'Industrie minérale, vol. 45, nr. 11, 1963.
8. Zorilescu D., *Metode matematice utilizate în Industria Minieră*. Oficiul de Documentare și Publicații Tehnice (ODPT), București, 1969.

ПОСТРОЕНИЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ПСЕВДОСТОХАСТИЧЕСКИХ КОРРЕЛЯЦИОННЫХ ЧИСЕЛ НА ОСНОВЕ ДАННЫХ ФУНКЦИЙ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Краткое содержание

В работе предлагаются способы для построения последовательности псевдостохастических корреляционных гисел на основе известных законов распределения.

Эти способы предлагаются вместо расчета регрессий.

После указания одного общего способа, подробно описываются способы построени последовательности псевдостохастических корреляционных чисел на основе законов нормального и логнормального распределений.

CONSTRUCTIONS DES SUITES DE NOMBRES PSEUDO-ALÉATOIRES CORRÉLÉES, AVEC DES FONCTIONS DE RÉPARTATITION DONNÉES

Résumé

On présente dans cet article des méthodes pour la construction des suites de nombres pseudo-aléatoires corrélées, en obeissant aux lois de distribution connues. On propose ces méthodes pour remplacer le calcul des regressions.

Après avoir indiqué le procédé général, on décrit en détail les procédés de construction des suites de nombres pseudo-aléatoires corrélées, obeissant aux lois de la distribution normale et logarithmique normale.

PRIMITĂ LA 15 X 1971

INSTITUTUL DE CERCETĂRI MINIERE, BUCUREŞTI

ANALELE UNIVERSITĂȚII BUCUREȘTI

MATEMATICĂ—MECANICĂ

Anul XXI — Nr. 2 — 1972

MATEMATICĂ — MECANICĂ

REDACȚIA
ANALELE UNIVERSITĂȚII BUCUREȘTI
Șoseaua Panduri nr. 90
Telefon 314000|132

SUMAR

SOMMAIRE

A DEFINITE INTEGRAL AND APPLICATION IN THE PRODUCTION OF HEAT IN A CILINDER

R. F. A. ABIODUN, B. L. SHARMA

We divide this paper into two sections. In section A, we evaluate a definite integral involving generalised function of two variables [5]. The result established is very general in character and include as particular cases some of the results given by Ragab and Simary [4] and Erdelyi [2]. The importances of this result lies in the fact that it helps us in deriving some formulae for G-function [3]. We have not come across these formulae in Meijer's papers [3], therefore we believe that the results are new.

In section B we apply this definite integral to solve the fundamental differential equation of the diffusion of heat in a cylinder.

SECTION A.

In a recent paper, Sharma [5] defined the generalised function of two variables as follows:

$$S\left[x, y \left| \begin{matrix} m_1, & 0 \\ p_1, & q_1 \end{matrix} \right] a_{p_1} b_{q_1} \left| \begin{matrix} n_2, & m_2 \\ p_2, & q_2 \end{matrix} \right) c_{p_2} d_{q_2} \left| \begin{matrix} n_3, & m_3 \\ p_3, & q_3 \end{matrix} \right) e_{p_3} f_{q_3} \right] =$$

$$= \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{c_1} \int_{c_2} \frac{\prod_{j=1}^{m_1} \Gamma(a_j + s + t) \prod_{j=1}^{m_2} \Gamma(1 - c_j + s) \prod_{j=1}^{n_2} \Gamma(d_j - s)}{\prod_{j=m_1+1}^{p_1} \Gamma(1 - a_j - s - t) \prod_{j=0}^{n_1} \Gamma(b_j + s + t) \prod_{j=m_2+1}^{p_2} \Gamma(c_j - s)} \times$$

$$\times \frac{\prod_{j=1}^{m_3} \Gamma(1 - e_j + t) \prod_{j=1}^{n_3} \Gamma(f_j - t)}{\prod_{j=n_2+1}^{q_2} \Gamma(1 - d_j + s) \prod_{j=m_3+1}^{p_3} \Gamma(e_j - t) \prod_{j=n_3+1}^{q_3} \Gamma(1 - f_j + t)} x^s y^t \, ds \, dt, \qquad (1)$$

where c_1 and c_2 are two suitable contours and the positive integers p_1, p_2, p_3, q_1, q_2, q_3, m_1, m_2, m_3 n_2 and n_3 satisfy the following inequalities $q_2 \geqslant 1$, $q_3 \geqslant 1$,

$p_1 \geqslant 0,\ 0 \leqslant m_1 \leqslant p_1,\ 0 \leqslant m_2 \leqslant p_2,\ 0 \leqslant n_2 \leqslant q_2,\ 0 \leqslant m_3 \leqslant p_3,\ 0 \leqslant n_3 \leqslant q_3.$
$p_1 + p_2 \leqslant q_1 + q_2,\ p_1 + p_3 \geqslant q_1 + q_3.$
The values $x = 0$ and $y = 0$ are excluded.
We establish the following result

$$\int_0^a t^{\lambda-1}\, S\left[xt,\ yt \left| \begin{matrix} m_1, & 0 \\ p_1, & q_1 \end{matrix} \right| \begin{matrix} a_{p_1} \\ b_{q_1} \end{matrix} \left| \begin{matrix} n_2, & m_2 \\ p_2, & q_2 \end{matrix} \right| \begin{matrix} c_{p_2} \\ d_{q_2} \end{matrix} \left| \begin{matrix} n_3 & m_3 \\ p_3, & q_3 \end{matrix} \right| \begin{matrix} e_{p_3} \\ f_{q_3} \end{matrix} \right] \mathrm{d}t =$$

$$= a^\lambda S\left[ax,\ by \left| \begin{matrix} m_1 + 1, & 0 \\ p_1 + 1, & q_1 + 1 \end{matrix} \right| \begin{matrix} \lambda, & a_{p_1} \\ \lambda + 1, & b_{q_1} \end{matrix} \left| \begin{matrix} n_2, & m_2 \\ p_2, & q_2 \end{matrix} \right| \begin{matrix} c_{p_2} \\ d_{q_2} \end{matrix} \left| \begin{matrix} n_3, & m_3 \\ p_3, & q_3 \end{matrix} \right| \begin{matrix} e_{p_3} \\ f_{q_3} \end{matrix} \right], \quad (2)$$

valid for $R\ (a) > 0,\ R(\lambda + d_j + f_h) > 0,\ j = 1, 2, \ldots, n_2;\ h = 1, 2, \ldots, n_3;$ $2(m_1 + n_2 + m_2) < p_1 + p_2 + q_1 + q_2,\ 2(m_1 + m_3 + n_3) < p_1 + p_3 + q_1 + q_3,$ $|\arg\ x| > \left(m_1 + m_2 + n_2 - \frac{1}{2} q_1 - \frac{1}{2} p_1 - \frac{1}{2} p_2 - \frac{1}{2} q_2\right)\pi,\ |\arg\ y| < \left(m_1 + m_3 + n_3 - \frac{1}{2} p_1 - \frac{1}{2} q_1 - \frac{1}{2} p_3 - \frac{1}{2} q_3\right)\pi.$

P r o o f: — Substitute the contour integral in the left side of (2) for the generalised function of two variables, changing the order of integration, which is permissible under the given conditions with (2), evaluating the inner integral and interpreting by (1) we obtain (2).
In particular if we take $m_1 = p_1 = q_1 = 0$ and using the result due to Sharma [6]

$$S\left[x,\ y,\ \left| \begin{matrix} 0, & 0 \\ 0, & 0 \end{matrix} \right| \begin{matrix} - \\ - \end{matrix} \left| \begin{matrix} n_2, & m_2 \\ p_2, & q_2 \end{matrix} \right| \begin{matrix} c_{q_2} \\ d_{p_2} \end{matrix} \left| \begin{matrix} n_3, & m_3 \\ p_3, & q_3 \end{matrix} \right| \begin{matrix} e_{p_3} \\ f_{q_3} \end{matrix} \right] =$$

$$= G^{n_2, m_2}_{p_2, q_2}\left[x \left| \begin{matrix} c_{p_2} \\ d_{q_2} \end{matrix} \right.\right] G^{n_3, m_3}_{p_3, q_3}\left[y \left| \begin{matrix} e_{p_3} \\ f_{q_3} \end{matrix} \right.\right] \quad (3)$$

in (2), we have

$$\int_0^a t^{\lambda-1}\, G^{n_2, m_2}_{p_2, q_2}\left[xt \left| \begin{matrix} c_{p_2} \\ d_{q_2} \end{matrix} \right.\right] G^{n_3, m_3}_{p_3, q_3}\left[yt \left| \begin{matrix} e_{p_3} \\ f_{q_3} \end{matrix} \right.\right] dt = a^\lambda \quad (4)$$

$$S\left[ax,\ ay \left| \begin{matrix} 1, & 0 \\ 1, & 1 \end{matrix} \right| \begin{matrix} \lambda \\ \lambda + 1 \end{matrix} \left| \begin{matrix} n_2, & m_2 \\ p_2, & q_2 \end{matrix} \right| \begin{matrix} c_{p_2} \\ d_{q_2} \end{matrix} \left| \begin{matrix} n_3, & m_3 \\ p_3, & q_3 \end{matrix} \right| \begin{matrix} e_{p_3} \\ f_{q_3} \end{matrix} \right],$$

valid for $R\ (a) > 0,\ R\ (\lambda + d_j + f_h) > 0,\ j = 1, 2, \ldots, n_2;\ h = 1, 2, \ldots, n_3;$ $2(n_2 + m_2) > p_2 + q_2, 2(n_3 + m_3) > p_3 + q_3, |\arg x| < \left(m_2 + n_2 - \frac{1}{2} p_2 - \frac{1}{2} q_2\right)\pi,$ $|\arg\ y| < \left(n_3 + m_3 - \frac{1}{2} p_3 - \frac{1}{2} q_3\right)\pi.$

In case we use another formula, due to Sharma [6]

$$\underset{y\to 0}{Lt}\, S\left[x,\ y\left|\begin{matrix} m_1, & 0 \\ p_1, & q_1 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 1-a_{p_1} \\ 1-b_{q_1} \end{matrix}\left|\begin{matrix} n_2, m_2 \\ p_2, q_2 \end{matrix}\right| \begin{matrix} c_{p_2} \\ d_{q_2} \end{matrix}\left|\begin{matrix} 1, 0 \\ 0, 1 \end{matrix}\right| \begin{matrix} - \\ 0 \end{matrix}\right]=$$

$$= G^{n_2,\, m_1+m_2}_{p_1+p_2,\, q_1+q_2}\left[x\left|\begin{matrix} a_1, \ldots, a_{m_1}, c_{p_2}, a_{m_1+1}+a_{p_1} \\ d_{q_2}, b_{q_2} \end{matrix}\right.\right] \tag{5}$$

in (1), we have

$$\int_0^a t^{\lambda-1} G^{m,\, n}_{p,\, q}\left[xt\left|\begin{matrix} a_p \\ b_q \end{matrix}\right.\right] dt = a^\lambda\, G^{m,\, n+1}_{p+1,\, q+1}\left[ax\left|\begin{matrix} 1-\lambda, a_p \\ b_q, -\lambda \end{matrix}\right.\right], \tag{6}$$

valid for $R(a) > 0$, $R(\lambda + b_j) > 0$, $j = 1, 2, \ldots, m$; $2(m+n) > p+q$, $|\arg x| < \left(m + n - \frac{1}{2}p - \frac{1}{2}q\right)\pi$.

By using the formulae [1, p. 216] in (3), almost all the results obtained by Ragab and Simary [4] can be derived.
By using the formula, Erdelyi [1, p. 216, equ. (3)] in (6) we have

$$\int_0^a x^{\lambda-1} J_v(x)\, dx = \frac{1}{2}\, a^\lambda\, G^{11}_{13}\left(\frac{1}{4}a^2\left|\begin{matrix} 1-\frac{1}{2}\lambda \\ \frac{1}{2}v, -\frac{1}{2}v, -\frac{1}{2}\lambda \end{matrix}\right.\right), \text{ where} \tag{7}$$

$R(a) > 0$, $R(\lambda + v) > 0$.
If $\lambda = v + 2$ in (7), it gives a known result. Erdelyi [2, p. 333, equ. (3)].
If $\lambda = 1$ in (7) and comparing with the result, Erdelyi [2, p. 333, equ. (1)], we have

$$G^{11}_{13}\left(\frac{a^2}{4}\left|\begin{matrix} 1 \\ \frac{1}{2}(1+v), \frac{1}{2}(1-v), 0 \end{matrix}\right.\right) = 2\sum_{n=0}^{\infty} J_{v+2n+1}(a). \tag{8}$$

Further we take $\lambda = 2 - v$ in (7) and comparing with the result, Erdely [2, p. 333, equ. (4)], we have

$$G^{11}_{13}\left(\frac{a^2}{4}\left|\begin{matrix} \frac{1}{2}v \\ \frac{1}{2}v, -\frac{1}{2}v, \frac{1}{2}v-1 \end{matrix}\right.\right) = \frac{a^{v-2}}{p^{v-2}\,\Gamma(v)} - a^{-1} J_{v-1}(a). \tag{9}$$

If we take $\lambda = v + 1$ and comparing (7) and the formula, Erdely [2, p. 332, equ. (2)], we get

$$G_{13}^{11}\left(\frac{a^2}{4}\left|\begin{matrix}\frac{1}{2}-\frac{1}{2}v \\ \frac{1}{2}v, -\frac{1}{2}v, -\frac{1}{2}-\frac{1}{2}v\end{matrix}\right.\right) = \frac{\sqrt{\pi}\,2^v\,\Gamma\left(v+\frac{1}{2}\right)}{a^v}\left[J_v(a)\,H_{v-1}(a) - \right.$$

$$\left. - H_v(a)\,J_{v-1}(a)\right]. \tag{10}$$

Next we compare (7) with the formula, Erdelyi [2, p. 333, equ. (5)], we get

$$G_{13}^{11}\left(\frac{a^2}{4}\left|\begin{matrix}\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\lambda \\ \frac{1}{2}v, -\frac{1}{2}v, -\frac{1}{2}\lambda-\frac{1}{2}\end{matrix}\right.\right) = \frac{2}{a^\lambda}\left[(\lambda+v-1)\,J_v(a)\right.$$

$$\left. S_{\lambda-1,\,v-1}(a) - J_{v-1}(a)\,S_{\lambda,\,v}(a) + \frac{2^\lambda}{a}\,\frac{\Gamma\left(\frac{1+\lambda+v}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1-\lambda+v}{2}\right)}\right]. \tag{11}$$

We use the formula, Erdelyi [1, p. 220, equ. (58)] in (7) and comparing it with the result [2, p. 338, equ. (37)], we have

$$G_{24}^{12}\left[a^2\left|\begin{matrix}0, \frac{1}{2} \\ v+\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -v-\frac{1}{2}\end{matrix}\right.\right] = \frac{2\sqrt{\pi}}{a}\sum_{n=0}^{\infty}[J_{v+n+1}(a)]^2. \tag{12}$$

By using the formula, Erdelyi [1, p. 219, equ. (46)] in (7) and comparing it with the formulae, Erdelyi [2, pp. 338—339, equ. 43, 44, 45], we obtain the following result for G-function

$$G_{13}^{20}\left[\frac{a^2}{4}\left|\begin{matrix}-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}v \\ -\frac{1}{2}v, \frac{1}{2}v, -\frac{1}{2}(v+1)\end{matrix}\right.\right] = \frac{2^v\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(v+\frac{1}{2}\right)}{a^v}\left[\gamma_v(a)\,H_{v-1}(a) - \right.$$

$$\left. - H_v(a)\,\gamma_{v-1}(a)\right]. \tag{13}$$

$$G_{24}^{21}\left[\frac{a^2}{4}\left|\begin{matrix}-\frac{1}{2}v, -\frac{1}{2}-\frac{1}{2}v\\ -\frac{1}{2}v, \frac{1}{2}v, -\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}v\right), -\frac{1}{2}(v+2)\end{matrix}\right.\right]=$$

$$=\frac{2}{a^{v+2}}[a^{v+1}\gamma_{v+1}(a)+2^{v+1}\Gamma(v+1)]. \tag{14}$$

$$G_{13}^{20}\left[\frac{a^2}{4}\left|\begin{matrix}-\frac{1}{2}(1+v)\\ -\frac{1}{2}v, -\frac{1}{2}(1+v), \frac{1}{2}(v-2)\end{matrix}\right.\right]=$$

$$=2\,a^{v-2}\left[\frac{ctn(v\pi)}{2^{v-1}\Gamma(v)}-a^{1-v}\gamma_{v-1}(a)\right]. \tag{15}$$

By using the formual, Erdelyi [1, p. 219, equ. (47)] in (7) and comparing it with the formulae, Erdelyi [2, p. 367, equ. (21), (22), (23)], we have

$$G_{13}^{21}\left[\frac{1}{4}a^2\left|\begin{matrix}\frac{1}{2}(2-v)\\ \frac{1}{2}(1+v), \frac{1}{2}(1-v), -\frac{1}{2}v\end{matrix}\right.\right]=$$

$$=\frac{2^v\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(v+\frac{1}{2}\right)}{a^{v-1}}[K_v(a)\,L_{v-1}(a)+L_v(a)\,K_{v-1}(a)] \tag{16}$$

$$G_{13}^{21}\left[\frac{1}{4}a^2\left|\begin{matrix}\frac{1}{2}(1-v)\\ \frac{1}{2}(1+v), \frac{1}{2}(1-v), -\frac{1}{2}(1+v)\end{matrix}\right.\right]=$$

$$=\frac{2}{a^{v+1}}[2^v\Gamma(v+1)-a^{v+1}K_{v+1}(a)]. \tag{17}$$

In the last we use the formulae, Erdelyi [1, p. 219, equ. (44), (47)] in (4) and comparing it with the formula Erdelyi [2, p. 367, equ. (26)], we get a new formula for generalised function of two variables.

$$S\left[\frac{1}{4}a^2x^2, \frac{1}{4}a^2y^2\left|\begin{matrix}[1,0]\\ [1,1]\end{matrix}\right|\begin{matrix}1\\ 2\end{matrix}\left|\begin{matrix}\begin{pmatrix}1,0\\0,2\end{pmatrix}\frac{1}{2}v, -\frac{1}{2}v\\ \begin{pmatrix}2,0\\0,2\end{pmatrix}\frac{1}{2}v, -\frac{1}{2}v\end{matrix}\right.\right]=$$

$$=\left(\frac{2}{a}\right)^2(x^2+y^2)^{-1}\left[\left(\frac{x}{y}\right)^v+ax\,J_{v+1}(ax)\,K_v(ay)-ayJ_v(ax)\,K_{v+1}(ay)\right]. \tag{18}$$

SECTION B

In this section we consider the diffusion of heat in a cylinder of radius a when there are sources of heat within it which lead to an axially symmetrical temperature distribution. The fundamental differential equation is then of the form, Sneddon [7, p. 202, equ. (166)],

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\Big) + \theta(r, t). \tag{19}$$

If we assume that the rate of generation of heat is independent of temperature and the cylinder is infinitely long so that the variation of z may be neglected. We shall in addition suppose that the surface $r = a$ is maintained at zero temperature and the initial distribution of temperature is also zero. We further suppose that

$$\theta(r, t) = \frac{k}{K} f(r)\, g(t) - \tag{20}$$

where k is the diffusivity and K the conductivity of the material.

Following Sneddon [7, p. 83] the finite Hankel transform of $f(r)$ is written as follows.

$$J[f(r)] = \int_0^a r f(r)\, J_0(r, \xi_i) dr = \bar{f}_i(\xi_i). \tag{21}$$

By using the formulae [1, p. 216, equ. (3)] and (4) in (21), we have

$$J\left(r^{\lambda-1} G^{m,\,n}_{p,\,q}\left(\frac{1}{4} y^2 r^2 \middle| \begin{matrix} a_p \\ b_q \end{matrix}\right)\right] = \frac{1}{2} a^{\lambda+1} S\left[\frac{1}{4} a^2\ \xi_i^2, \frac{1}{4} a^2\ y^2 \middle| \begin{matrix} \frac{1}{2}\lambda + \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}\lambda + \frac{3}{2} \end{matrix} \middle| \begin{matrix} 1, 0 \\ 1, 1 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} 1, 0 \\ 0, 2 \end{matrix} \middle| 0, 0 \middle| \begin{matrix} m, n \\ p, q \end{matrix} \middle| \begin{matrix} a_p \\ b_p \end{matrix}\right], \tag{22}$$

where ξ_i is the root of the equation

$$J_0(a\ \xi_i) = 0. \tag{23}$$

Making use of the inversion theorem for finite Hankel transform, Sneddon [7, p. 83], we have from (22)

$$r^{\lambda-1}\ G^{m,\,n}_{p,\,q}\left[\frac{1}{4} y^2 r^2 \middle| \begin{matrix} a_p \\ b_q \end{matrix}\right] = a^{\lambda-1} \sum_i S\left[\frac{1}{4} a^2 \xi_i^2, \frac{1}{4} a^2 y^2 \middle| \begin{matrix} \frac{1}{2}\lambda + \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}\lambda + \frac{3}{2} \end{matrix} \middle| \begin{matrix} 1, 0 \\ 1, 1 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} 1, 0 \\ 0, 2 \end{matrix} \middle| 0, 0 \middle| \begin{matrix} m, n \\ p, q \end{matrix} \middle| \begin{matrix} a_p \\ b_q \end{matrix}\right] \frac{J_0(r\xi_i)}{[J_1(a\xi_i)]^2}. \tag{24}$$

We apply the finite Hankel transforms (22) to obtain the solution of (19). Its solution obtained as [7, p. 203] is

$$\theta(r, t) = a^{\lambda-1} \sum_i S\left[\frac{1}{4} a^2 \xi_i^2, \frac{1}{4} a^2 y^2 \left| \begin{matrix} 1, & 0 \\ 1, & 1 \end{matrix} \right| \begin{matrix} \frac{1}{2}\lambda + \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}\lambda + \frac{3}{2} \end{matrix} \right|$$

$$\left. \begin{matrix} 1, & 0 \\ 0, & 2 \end{matrix} \Big)_{0,\ 0} \left| \begin{matrix} m, & n \\ p, & q \end{matrix} \Big) \begin{matrix} a_p \\ b_q \end{matrix} \right| \right] \frac{J_0(r\xi_i)}{[J_1(a\ \xi_i)]^2} h(\xi_i, t), \tag{25}$$

where $h(\xi_i, t) = \int_0^t g(\tau)\, e^{-K\xi_i^2(t-\tau)}\, d\tau = e^{-K\xi_i^2 t} \int_0^t g(\tau)\, e^{K\xi_i^2 \tau}\, d\tau,$

and the sum is taken over all the positive roots of (23).
With the help of (25) and [8, p. 100, (5, 2.4), (5, 2.5)] we can obtain the value of

$$\frac{k}{r} \frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial u}{\partial r}\right)$$

by using (20) and (24), we get the value of $\frac{\partial u}{\partial t}$, substituting these values in (19), we observe that the equation is satisfied.

The boundary condition $u\ (a, t) = 0$ is satisfied because $h(\xi_i, 0) = 0$. We find that (25) converges uniformly when $t > 0$, and so the function $u(r, t)$ represented by it is continuous when $0 \leqslant r \leqslant a$.

The term by term differentiations are justified because the values of

$$\frac{k}{r} \frac{\partial u}{\partial r}\left(r \frac{\partial u}{\partial r}\right) \text{ and } \frac{\partial u}{\partial t}$$

are uniformly convergent, when $t > 0$ and $0 \leqslant r < a$.

REFERENCES

[1] Erdelyi, A. *Higher transcendental functions*, Vol. I (1953)

[2] Erdelyi, A. *Tables of integral transforms*, Vol. II, (1954).

[3] Meijer, C. S. *„Expansion theorems for G-functions I — XI"*. Indag. Math. V. 14—18, 1952—1956, pp. 369—379; 483—487; 43—49; 187—193; 349—357; 77—82; 83—91; 273—279; 243—251; 309—314; 70—82. MR 15, 791; MR 15, 955; MR 16, 1106; MR 17, 846.

[4] Ragab, F. M. , Simary, M. A. *„Definite integrals involving Whittaker Functions"*. Proc. Camb. Phil. Soc. 64, pp. 1033 — 1039, 1968.

[5] Sharma, B. L. *„On the generalised function of two variables* (I)". Annales de la Societé Scientifique de Bruxelles, 79, I, pp. 26—40, 1965.

[6] Sharma, D. L. *„On the generalised function of two variables* (II), (III)". Communicated for publication.

[7] Sneddon, I. N. *Fourier transforms* (McGraw-Hill, New-Nork, 1951).

[8] Lebedev, N. N. *Special functions and their applications* (Prentice-Hall, Inc, Englewood Cliffs, N.J. 1965).

Received on 30. XII. 1971

University of Ife
Ile — Ife, Nigeria,
Department of Mathematics

O CLASĂ DE VARIABILE ALEATOARE DEPENDENTE CU VALOAREA MEDIE INFINITA

A. BACIU

În prezenta lucrare ne ocupăm de unele proprietăţi ale unei clase de variabile aleatoare dependente care au momentele de prim ordin infinite.

Studiul variabilelor aleatoare care au momente infinite a fost abordat pentru prima dată de D. Bernoulli în 1738; problema studiată devenind celebră sub denumirea de „paradoxul din Petersburg„.

Aceste probleme au făcut obiectul unor lucrări ale lui Laplace, apoi în cazul variabilelor aleatoare independente au obţinut rezultate noi W. Feller [6], Y. Chow [3] şi H. Robbins [4].

D e f i n i ţ i e Fie un şir de variabile aleatoare $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ definite pe un cîmp de probabilitate $(E, K. P)$. Spunem că acest şir satisface condiţia (c) dacă pentru şirul de numere reale şi pozitive $\{a_n\}_{u \in N}$ cu $a_n = n^{1+\delta}$, $\delta \geqslant 0$ avem:

$$D^2\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{I_{Bi}}{P(B_i)}\right) \leqslant c \sum_{i=1}^{n} D^2\left(\frac{I_{Bi}}{P(B_i)}\right)$$

unde $B_i = \{|x_i| \text{ „}>\text{''} \ a_i\}$ $i \in I_n = \{1, 2, \ldots, n\}$ $n = 1, 2, \ldots$ iar c este o constantă pozitivă.

În 1946 W. Feller în [6] demonstrează o teoremă 0—1 pentru un şir de variabile aleatoare independente, identic repartizate şi cu valoarea medie infinită.

Pentru variabilele aleatoare care satisfac conciţia (c) se demonstrează următoarea teoremă:

T e o r e m ă Fie $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ un şir de variabile aleatoare care satisfac condiţia (c) şi $\{a_n\}_{n \in N+}$ un şir de numere reale şi pozitive cu $a_n = n^{1+\delta}$, $\delta \geqslant 0$ Dacă

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x_n| \, dF(x) = \infty$$

atunci probabilitatea apariţiei de o infinitate de ori a evenimentului $\{|s_n| > a_n\}$ este zero sau unu. după cum:

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\{|x_n| \geqslant a_n\} < \infty$$

sau

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 P\{|x_n| \geqslant a_n\}} < \infty$$

Prin S_n înțelegem suma primelor n-variabile aleatoare.

D e m o n s t r a ț i e. Presupunem întîi că:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 P\{|x_n| \geqslant a_n\}} < \infty$$

În acest caz $\frac{S_n}{a_n}$ nu poate avea o limită finită. În adevăr avem

$$\frac{x_n}{a_n} = \frac{S_n}{a_n} - \frac{S_{n-1}}{a_{n-1}} \cdot \frac{a_{n-1}}{a_n}$$

Dacă $\lim \frac{S_n}{a_n}$ ar fi finită, atunci $\frac{x_n}{a_n}$ ar converge către zero, ceea ce conform teoremei lui Borel. Cantelli pentru variabile aleatoare care satisfac condiția (c), [1] nu este posibil.

Presupunem că

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\{|x_n| \geqslant a_n\} < \infty$$

Să notăm

$$\mu_k = \int_{|x| \leqslant a_k} x \, dF(x) \qquad k = 1, 2, \ldots,$$

și să considerăm variabilele aleatoare

$$X'_k = \begin{cases} x'_k - \mu_k & \text{dacă} \quad |x_k| \leqslant a_k \\ 0 & \text{dacă} \quad |x_k| > a_k \end{cases}$$

pentru $k = 1, 2, \ldots$

Probabilitatea ca $x_k \neq x'_k + \mu_k$ este dată de termenul general al seriei convergente:

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\{|x_n| \geqslant a_n\}$$

Deci

$$P\{x_k \neq x'_k + \mu_k\} = P\{|x_k| \geqslant a_k\}$$

Deoarece această serie converge, avem:

$$P(\lim_{k \to 0} \sup x_k \neq x'_k + \mu_k) = 0$$

sau

$$P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} x_k \neq x'_k + \mu_k\right) = 0$$

Deci probabilitatea evenimentului complementar este egală cu unu.

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty} x_k = x'_k + \mu_k\right) = 1$$

și

$$P\left\{\left|\bigcap_{\varepsilon>0}\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{n} x_k - \sum_{k=1}^{n}(x'_k + \mu_k)\right)\right| < \varepsilon\right\} = 0$$

pentru orice $\varepsilon > 0$
sau

$$\lim_{n\to\infty}\left[S_n - \sum_{k=1}^{n}(x'_k + \mu_k)\right] = 0$$

Mai avem de arătat că, cu probabilitatea egală cu unu:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n} x'_k}{a_n} = 0$$

Pentru aceasta va fi suficient să arătăm că: $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{a_k}x'_k$ converge cu probabilitate egală cu unu, așa cum în mod frecvent se folosește. Această proprietate va rezulta conform teoremei lui Khintchine și Kolmogorov din convergența seriei:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{a^2}\int_{|x|<a_k}(x - \mu_k)^2\,\mathrm{d}F(x)$$

Lunînd $a_0 = 0$ obținem

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{a_k^2}\int_{|x|<a_k} x^2\,dF(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{a_k^2}\sum_{k=1}^{\infty}{}'\int_{a_{i-1}\leqslant|x|<a_i} x\,dF(x) = \sum_{i=1}^{\infty}\int_{a_{i-1}\leqslant|x|<a_i} x^2\,dF(x)\sum_{k=i}^{\infty}\frac{1}{a_k^2} \qquad (2)$$

Dar

$$\sum_{k=i}^{\infty}\frac{1}{a_k^2} < \frac{1}{2^{i+2\varepsilon}}$$

pentru orice $\varepsilon > 0$

Seria (2) devine:

$$\sum_{i=1}^{\infty}\int\limits_{a_{i-1}\leqslant|x|<a_i} x^2\,dF(x)\sum_{k=i}^{\infty}\frac{1}{a_k^2}\leqslant\sum_{i=1}^{\infty}\int\limits_{a_{i-1}\leqslant|x|<a_i} x^2\,dF(x)\,\frac{1}{2^{i+2\varepsilon}}\leqslant\sum_{i=1}^{\infty} i\int\limits_{a_{i-1}\leqslant|x|<a_i} dF(x)=$$

$$=\sum_{i=1}^{\infty}\int\limits_{|x|\geqslant a_i} d(Fx)=\sum_{i=1}^{\infty}P\{|x_k|\geqslant a_i\}<\infty$$

Prin urmare, ne rămîne, să arătăm că

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}\mu_k}{a_n}=0$$

Fie $N<n$ un număr arbitrar

$$\left|\frac{1}{a_n}\sum_{k=1}^{n}\mu_k\right|\leqslant\frac{1}{a_n}\sum_{k=1}^{n}\int\limits_{|x|<a_k}|x|\,dF(x)=\frac{1}{a_n}\sum_{k=1}^{N}\int\limits_{|x|<a_k}|x|\,dF(x)+$$

$$+\frac{1}{a_n}\sum_{k=N+1}^{n}\int\limits_{|x|<a_k}|x|\,dF(x) \tag{3}$$

Primul termen al sumei (3) este:

$$\frac{1}{a_n}\sum_{k=1}^{N}\int\limits_{|x|<a_k}|x|\,dF(x)\leqslant\frac{1}{a_n}\sum_{k=1}^{N}a_k\int\limits_{|x|<a_k}dF(x)\leqslant\frac{Na_N}{a_n}$$

deoarece $a_k\leqslant a_N$ pentru $k\leqslant N$

Avem

$$\lim_{n\to\infty}\frac{Na_N}{a_n}=1$$

Al doilea termen al sumei (3) este:

$$\frac{1}{a_n}\sum_{k=N+1}^{n}\int\limits_{|x|<a_k}|x|\,dF(x)=\frac{n-N}{a_n}\int\limits_{a_N\leqslant|x|<a_{N+1}}|x|dF(x)+\frac{n-N-1}{a_n}\int\limits_{a_{N+1}<|x|a_{N+2}}|x|\,dF(x)+\ldots+$$

$$+\frac{n}{a_n}\int\limits_{a_{n-1}\leqslant|x|<a_n}|x|\,dF(x)+\frac{n-N}{a_n}\int\limits_{|x|<a_N}|x|dF(x)$$

Avem

$$\frac{n-N}{a_n} a_{N+1} \int\limits_{a_N \leqslant |x| < a_{N+1}} dF(x) + \frac{n-N-1}{a_n} a_{N+2} \int\limits_{a_{N+1} \leqslant |x| < a_{N+2}} dF(x) + \ldots + \frac{n}{a_n} \cdot a_n \int\limits_{a_{n-1} \leqslant |x| < a_n} dF(x) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{n}{a_n} a_{N+1} \int\limits_{a_N \leqslant |x| < a_{N+1}} dF(x) + \frac{n}{a_n} a_{N+2} \int\limits_{a_{N+1} \leqslant |x| < a_{N+2}} dF(x) + \ldots + n \int\limits_{a_{n-1} \leqslant |x| < a_n} dF(x) \leqslant$$

$$\leqslant (N+1) \int\limits_{a_N \leqslant |x| < a_{N+1}} dF(x) + (N+2) \int\limits_{a_{N+1} \leqslant |x| < a_{N+2}} dF(x) + \ldots + n \int\limits_{a_{k-1} \leqslant |x| < a_n} dF(x) < \int\limits_{|x| \geqslant a_N} dF(x) +$$

$$+ \int\limits_{|x| \geqslant a_{N+1}} dF(x) + \ldots + \int\limits_{|x| \geqslant a_{n-1}} dF(x)$$

acesta deoarece șirul $\frac{n}{a_n}$ este un șir descrescător

Însă

$$\int\limits_{|x| \geqslant a_N} dF(x) + \int\limits_{|x| \geqslant a_{N+1}} dF(x) + \ldots + \int\limits_{|x| \geqslant a_{n-1}} dF(x) < \sum_{k=0}^{\infty} P[x_{n+k} \geqslant a_k].$$

și pentru $N \to \infty$ această sumă tinde către zero, deoarece este restul sumei convergente

$$\sum_{i=1}^{\infty} P[|x_i| \geqslant a_i] > \infty$$

De asemenea avem

$$\frac{n-N}{a_n} \int\limits_{|x| < a_n} |x| dF(x) \leqslant \frac{n}{a_n} \cdot a_N$$

și prin urmare

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n-N}{a_n} \int\limits_{|x| < a_N} |x| dF(x) = 0$$

Astfel și termenul al doilea din (3) tinde către zero în ipotezele considerate

Deci

$$\lim_{n \to \infty} \left| \frac{1}{a_n} \sum_{k=1}^{n} \mu_k \right| = 0$$

Teorema este demonstrată.

Remarcăm că ipoteza

$$\int_{-8}^{\infty} x dF(x) = \infty$$

a fost esențială în această teoremă.

În adevăr dacă această ipoteză nu este satisfăcută se poate vedea imediat că teorema nu mai este adevărată.

De exemplu, luînd $a_n = n$ și $M|x| > 1$ atunci

$$P\{\lim_{n\to\infty} \sup (S_n) > n\} = 1$$

cu toate că după cum se poate verifica imediat

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\{|x| \geqslant n\} \leqslant M(|x|) > \infty.$$

BIBLIOGRAFIE

[1] Baciu, A — *O teoremă 0—1 pentru o clasă de variabile aleatoare* Anal. Univ. Buc. Nr 1 (1971) p. 9 – 17

[2] Baciu, A — *Asupra legii numerelor mari pentru o clasă de variabile aleatoare dependente.* Anal. Univ. Buc. Nr.2 (1971) p. 19–22

[3] Chow, Y — *Some convergence theorems for linear combination of independent random variables.* Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 42 (1969)p. 43—47

[4] Chow, Y. Robbins, M — *On sums of independent random variables with infinite moments and „fair" games.* Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 47 (1961) p. 330—335

[5] Feller, W — *On introduction to probability theory and its application.* Vol. I, New York (1946)

[6] Feller, W — *A limit theorem for random variables with infinite moments* — Amer Journ. of Math. (1946) p. 257–261

КЛАСС ЗАВИСИМЫХ СЛУЧАЙНЫХ ПЕРЕМЕННЫХ СО СРЕДНИМИ БЕСКОНЕЧНЫМИ ЗНАЧЕНДЯМИ

В этой работе доказывается одна теорема для последовательности случайных перемен, которые выполняют условие (C).

Последовательность случайных величин $X_1, X_2, \ldots, X_n$.. выполняет условие (C), если для последовательности действительных и положительных чисел $\{a_n\}_{n\in N}$, $a_n = n^{1+\delta}$, $\delta \geqslant 0$ имеем:

$$D^2\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{I_{Bi}}{P(B_i)}\right) \leqslant C \sum_{i=1}^{n} D^2\left(\frac{I_{Bi}}{P(B_i)}\right)$$

где $B_i = \{|X_i| > a_i\}$ $i \in I_n = \{1, 2, \ldots n\}$ $n = 1, 2, \ldots,$ а C является положительной постоянной.

Теорема: Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ случайные переменные, которые выполняют условие (C) и

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x| d\, F(x) = \infty$$

Тогда вероятность проявления события $\{|S_n| > a_n\}$ $S_n = X_1 + X_2 + \ldots X_n$ бесконечного числа раз есть ноль или один, если или $\sum_{n=1}^{\infty} P\{|X_n| \geqslant a_n\} < \infty$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 P\{|X_n| \geqslant a_n\} < \infty.$$

ASUPRA UNEI FAMILII DE FUNCȚII ATAȘATE UNUI OPERATOR

V. BRIȘCĂ, GH. TUDOR

Fie X un convex inclus în spațiul Banach real E și operatorul $A : X \to E^*$, unde prin E^* înțelegem dualul lui E.

Vom nota cu (φ, x) valoarea funcționalei $\varphi \in E^*$ în punctul $X \in E$ și pentru orice $x, y \in X$, vom scrie aplicația:

$$t \to A\,((1-t)\,x + ty),\ t \in [0, 1], \text{ sub forma}$$

$$A_{\overline{x,\,y}}\ t : [0, 1] \to E^*.$$

În cele ce urmează ne vom limita la operatori definiți pe mulțimi convexe, cazurile contrare vor fi menționate.

D e f i n i ț i a 1. Operatorul A se numește monoton $\Leftrightarrow (Ay - Ax, y - x) \geqslant 0\ \forall\ x, y \in X$.

Exemplul 1

Operatorul $T : L^2\,[0, 1] \to L^2[0, 1]$ definit prin

$$T\varphi = t\varphi(t),\ \varphi \in L^2[0, 1], \text{ este monoton căci:}$$

$$(T\varphi - T\Psi, \varphi - \Psi) = \int_0^1 [t\varphi(t) - t\Psi(t)]\,[\varphi(t) - \Psi(t)]\ dt = \int_0^1 t\,[\varphi(t) - \Psi(t)]^2\, dt \geqslant 0.$$

(considerăm numai funcții cu valori reale).

Observăm că operatorul T este liniar și simetric.

E x e m p l u l 2. Foarte importantă în teoria operatorilor monotoni este aplicația de dualitate.

Fie E spațiu Banach și dualul său E^* și die $x \in E$. Vom pune:

$$Jx = \{f \in E^* \mid (f, x) = \|x\|^2,\ \|f\| = \|x\|\}$$

După teorema Hahan-Banach, mulțime Jx este nevidă, convexă și închisă. Dacă E^* este strict convex, Jx se reduce la un singur element.

Aplicația $x \in E \to Jx \in E^*$ o vom numi aplicația de dualitate și o vom nota cu J. Ea este monotonă căci:

$$(Jx - Jy, x - y) = \|x\|^2 + \|y\|^2 - (Jx, y) - (Jy, x) \geqslant (\|x\| - \|y\|)^2.$$

D e f i n i ț i a 2. Vom numi: A-funcții totalitatea funcțiilor $f_{x,\,y} : [0, 1] \to R$ unde $x, y \in X$. definite prin

$$f_{x,\,y}(t) = (A_{\overline{x,\,y}}t,\ y - x)$$

P r o p o z i ţ i a 1. A este monoton $\Leftrightarrow$ A-funcţiile sînt crescătoare.

D e m o n s t r a ţ i e.

Fie A monoton şi $t_1 > t_2$. Avem

$$f_{x,y}(t_1) - f_{x,y}(t_2) = (A_{\overline{x,y}}\, t_1, y - x) - (A_{\overline{x,y}}\, t_2, y - x) =$$

$$= (A_{\overline{x,y}}\, t_1 - A_{\overline{x,y}}\, t_2, y - x) =$$

$$= \frac{1}{t_1 - t_2} (A_{\overline{x,y}} t_1 - A_{\overline{x,y}} t_2, (x - t_1 + t_1 y) - (x - t_2 x + t_2 y)) =$$

$$= \frac{1}{t_1 - t_2} (A(x - t_1 x + t_1 y) - A(x - t_2 x + t_2 y), (x - t_1 x + t_1 y) - (x - t_2 x +$$

$$+ t_2 y) \geqslant 0$$

Fie acum $f_{x,y}$ crescătoare $\forall\ x, y \in X$. Avem:

$$f_{x,y}(1) \geqslant f_{x,y}(0)\ \forall\ x, y \in X, \text{ adică}$$

$(Ay, y - x) \geqslant (Ax, y - x)\ \forall\ x, y \in X$ şi trecînd totul în primul membru al inegalităţii obţinem tocmai definiţia 1.

D e f i n i ţ i a 3. A se numeşte afin $\Leftrightarrow A_{\overline{x,y}} t = (1 - t)\ Ax + tAy\ \forall\ x, y \in X$ şi $t \in [0, 1]$.

Evident orice operator liniar este afin.

P r o p o z i ţ i a 2. A afin $\Rightarrow$ A-funcţiile sînt liniare.

D e m o n s t r a ţ i e.

$$f_{x,y}(t) = (A_{\overline{x,y}} t, y - x) = ((1 - t)\ Ax + tAy, y - x) =$$

$$= t(Ay - Ax, y - x) + (Ax, y - x) = a_{x,y}\, t + b_{x,y},\ t \leftarrow [0, 1].$$

D e f i n i ţ i a 4. A se numeşte h-liniar $\Leftrightarrow$ A-funcţiile sînt liniare.

Evident, orice operator afin este h-liniar.

Vom da exemplu de operator h-liniar care nu e afin.

E x e m p l u l 3. Fie $E = R^2$ şi $x = (x_1, x_2) \in R^2$. Considerăm aplicaţia $A: X \subset R^2 \to R^2$ definit prin:

$$Ax = (x_1, x_1)^2$$

Vom lua $X = \{x \in R^2 \mid x = (x_1, c),\ c \in R \text{ fixat}\}$.

Fie $x = (x_1, c)$ şi $y = (y_1, c)$, două puncte arbitrare din X. Avem succesiv pentru $t \in [0, 1]$

$$x - y = (x_1 - y_1, 0)$$

$$(1 - t)\ x + ty = ((1 - t)\ x_1 + ty_1, c)$$

$$Ax = (x_1, x_1^2),\ Ay = (y_1, y_1^2)$$

$$A_{\overline{x,y}} t = ((1 - t)\ x_1 + ty_1, [(1 - t)\ x_1 + ty_1]^2)$$

$$(1 - t)\ Ax + tAy = (1 - t)\ x_1 + ty_1, (1 - t)\ x_1^2 + ty_1^2)$$

Evident:

$$A_{\overline{x,\ y}}t \neq (1-t)\,Ax + tAy, \text{ deci } A \text{ nu e afin, dar}$$

$$f_{x,\ y}(t) = (A_{\overline{x,\ y}}t,\ y-x) = [(1-t)\,x_1 + ty_1]\,(y_1 - x_1) + [(1-t)x_1 +$$

$$+\ ty_1]^2 \cdot 0 = t(y_1 - x_1)^2 + x_1(y_1 - x_1).$$

Deci $f_{x,\ y}(t)$ sînt liniare, adică A este h-liniar.

P r o p o z i ţ i a 3. A h-liniar $\Rightarrow f_{x,\ y}(t) = (Ay - Ax, y - x)t + (Ax, y - x)$

D e m o n s t r a ţ i e.

Din definiţia 4, A-funcţiile sînt liniare:

$$f_{x,\ y}(t) = a_{x,\ y}t + b_{x,\ y}$$

Făcînd aici $t = 0$ şi $t = 1$, obţinem:

$$b_{x,\ y} = (Ax,\ y - x) \text{ şi } a_{x,\ y} = (Ay - Ax,\ y - x)$$

O b s e r v a ţ i e. Pe baza acestei propoziţii în exemplul 3 avem $a_{x,\ y} = (Ay - Ax,\ y - x) = (y_1 - x_1)^2 \geqslant 0$. Deci A este monoton

D e f i n i ţ i a 5. A se numeşte hemicontinuuu $\Leftrightarrow (A_{\overline{x,\ y}}t,\ z) : [0,\ 1] \to R$ sînt funcţii continui $\forall x,\ y \in X,\ z \in E$, fixaţi.

D e f i n i ţ i a 6. A se numeşte h — continuu $\Leftrightarrow A$ — funcţiile sînt continue

Evident A hemicontinuuu $\Rightarrow A$ h-continuuu.

Dăm un exemplu simplu de operator h-continuu fără a fi hemicontinuu.

E x e m p l u l 4. Fie $A: X \subset R^2 \to R^2$ unde $X = \{x \in R^2 \mid x = (x_1, c)$ unde $c \in R$ este fix$\}$ şi $Ax = (x_1, \operatorname{sgn} x_1)$.

Atunci

$f_{x,y}(t) = (A_{\overline{x,\ y}}t,\ y - x) = t(y_1 - x_1)^2 + x_1(y_1 - x_1)$ funcţie continuă, adică A h-continuuu.

Dar:

$$(A_{\overline{x,\ y}}t,\ z) = [(1-t)x_1 + ty_1]z_1 + \operatorname{sgn}\ [(1-t)x_1 + ty] \cdot z_2$$

care nu mai este o funcţie continuă $\forall x,\ y \in X$ şi $z \in R^2$, deci A nu este hemicontinuuu.

P r o p o z i ţ i a 4. A h-liniar $\Rightarrow A$ h-continuuu.

Evident, A-funcţiile fiind liniare sînt continue.

D e f i n i ţ i e 7. Fie E_1 şi E_2 două spaţii vectoriale local convexe separate, $x \in E_1$ şi D o vecinătate a lui x. Se spune că aplicaţia A a lui D în E_2 este diferenţiabilă Gâteaux în x dacă există o aplicaţie liniară şi continuă $y \to A'_x y$ de la E_1 la E_2 astfel încît pentru orice $y \in E_1$ avem:

$$\lim_{h \to 0} \frac{A(x + hy) - Ax}{h} = A'_x y$$

P r o p o z i ţ i a 5. A diferenţiabil Gâteaux în $x_0 \in X \Rightarrow \forall x,\ y \in X$ astfel încît $x_0 = (1 - t_0)\,x + t_0 y,\ t_0 \in [0.\ 1],\ f_{x,\ y}(t)$ este derivabilă în t_0.

Demonstraţie:

Avem: $\frac{1}{t-t_0}(f_{x,y}(t)-f_{x,y}(t_0)=\frac{1}{t-t_0}(A_{\overline{x,y}}t-A_{\overline{x,y}}t_0,\ y-x)=$

$=\left(\frac{A_{\overline{x,y}}t-A_{\overline{x,y}}t_0}{t-t_0},\ y-x\right)=\left(\frac{A(x_0+h(y-x))-Ax_0}{h},\ y-x\right)$ unde $h=t-t_0$.

Atunci:

$$\lim_{t\to t_0}\frac{f_{x,y}(t)-f_{x,y}(t_0)}{t-t_0}=\lim_{h\to 0}\left(\frac{(Ax_0+h(y-x)\,Ax_0}{h},\ y-x\right)=(A'_{x0}(y-x,\ y-x)$$

Avem deci relaţia

$$f'_{x,y}(t_0)=(A'_{x_0}(y-x),\ y-x)=(A'_{x_0}y-A'_{x_0}x,\ y-x)$$

În particular A diferenţiabil Gâteaux în $x\in X\Rightarrow f_{x,y}(t)$ sînt derivabile în $t=0\ \forall\ y\in X$ şi avem:

$$f'_{x,y}(0)=(A'_x(y-x),\ y-x)=(A'_xy-A'_xx,\ y-x)$$

Definiţia 8. A: $X\in E\to E^*$ se numeşte h-diferenţiabil în $x_0\in X\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow\forall\ x,\ y\in X$ astfel încît $x_0=(1-t_0)\ x+t_0y$, $f_{x,y}(t)$ sînt derivabile în t_0.

Propoziţia 6. A h-liniar $\Rightarrow A$ h-diferenţiabil în $\forall$ punct x_0.

Într-adevăr, A h-liniar $\Rightarrow f_{x,y}(t)=(Ay-Ax,\ y-x)\ t+(Ax,\ y-x)$ (propoziţia 3) De unde afirmaţia.

Propoziţia 7. A diferenţiabil Gâteaux $\Rightarrow A$ h-diferenţiabil.

Rezultă din propoziţia 5. Observăm că operatorul de la exemplul 4 este h-diferenţiabil în $x=0$ dar nu e diferenţiabil Gâteaux în acel punct.

Propoziţia 8. Fie $A:X\subset E\to E^*$, X convex deschis, A h-diferenţiabil în $\forall$ pct. $x\in X$. În aceste condiţii A este monoton h-continuu $\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow f'_{x,y}(t)\geqslant 0\ \forall\ x,\ y\in X,\ t\in[0,\ 1]$.

Demonstraţie.

A monoton h-continuu $\Rightarrow$

$$f'_{x,y}(t_0)=\lim_{t\to t_0}\frac{f_{x,y}(t)-f_{x,y}(t_0)}{t-t_0}=\lim_{t\to t_0}\frac{A_{\overline{x,y}}t-A_{\overline{x,y_0}},\ y-x)}{t-t_0}=$$

$$=\lim_{t-t_0}\frac{(A[(1-t)\ x+ty]-A[(1-t_0)\ x+t_0y],\ [(1-t)\ x+ty[-[(1-t_0)\ x+t_0])}{(t-t_0)^2}\geqslant 0$$

Fie acum $f'_{x,y}(t)\geqslant 0\ \forall\ x,y\in X,\ t\in[0,\ 1]$

Din h-diferenţiabilitate rezultă A h—continuu.

Cum $f'_{x,y}(t)\geqslant 0\ (\forall)\ t\Rightarrow f_{x,y}(t)$ crescător $\forall\ x,\ y\in X$.

Deci $f_{x,y}(1)\geqslant f_{x,y}(0)\Rightarrow(Ay-Ax,\ y-x)\geqslant 0$.

Reamintim:

Definiţia 9. Fie $F(u)$ o funcţională reală definită pe spaţiul Banach E, diferenţiabil Gâteaux în fiecare punct $x\in E$. Dacă există un operator A: $E\to E^*$ astfel încît

$F'_x(h)=(Ax,\ h)\ \forall\ x,\ h\in E$, atunci A se numeşte gradientul lui $F(u)$.

Definiţia 10. Un operator $A : E \to E^*$ se numeşte potenţial pe mulţimea $X \subset E$ dacă există o funcţională F astfel încît

$$(\text{grad } F)\ (x) = Ax \ \forall\ x \in X$$

Cu aceste definiţii avem:

Propoziţia 9. Fie $A : E \to E^*$, Dacă: A h-continu şi $\int_0^1 f_{x,y}(t)\ dt = \int_0^1 f_{0,x}(t)\ dt - \int_0^1 f_{0,y}(t)\ dt$, atunci A potenţial.

Demonstraţie.

Fie funcţionala $F(u) = \int_0^1 f_{0,u}(t)\ dt$

Avem:

$$\frac{F(x+th) - F(x)}{t} = \frac{\int_0^1 f_{0,x+th}(s)\ ds - \int_0^1 f_{0,x}(s)\ ds}{t} = \frac{\int_0^1 f_{x,x+tk}(s)\ ds}{t} =$$

$$= \frac{\int_0^1 (A[(1-s)\ x + s(x+th)],\ th)\ ds}{t} = \int^1 (A(x+sth),\ h)\ ds = \int_0^1 \frac{1}{s}\ (A(x+sth),\ sh)\ ds$$

Din h — continuitatea lui A avem:

$$\lim_{t\to 0} \frac{F(x+th) - F(x)}{t} = \lim_{t\to 0} \int_0^1 (A(x+sth),\ sh)\ ds =$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{s}\ (Ax,\ sh)\ sd = \int_0^1 (Ax,\ h)\ ds = (Ax,\ h)$$

Deci $F_x(h) = (Ax,\ h)$. *c. c. t. d.*

BIBLIOGRAFIE

Haim Brezis — *Equations et inequations non lineaires dans des espaces vectoriels en dualite.* Ann. Inst. Fourier, Grenoble 18, 1 (1968) p. 11ă—17ă.

R.I. Kacurovski — *Monotone non linear operators in Banach Spaces* Y.M.H. 2(140) XXII (1968) p. 121—168.

ON A FAMILY OF FUNCTIONS ASSOCIATED TO AN OPERATOR

Summary

The authors deal with a family of functions which can be associated to an operator A : X → E*, where E is a Banach space and A is a not necessarily linear operator.

This family is used in order to obtain some properties for operators of different type, e.g. monoton, potential, hemicontinuous, etc.

DETERMINAREA FLUXULUI MEDIU ÎNTR-O REȚEA DE TRANSPORT

C. DINESCU

Problemele legate de fluxuri în rețele sînt de o deosebită importanță pentru activitatea practică.

În literatura de specialitate [1] sînt legate de problema fluxului și anume:

— găsirea rutei optimale;

— determinarea volumului de flux maxim;

Pentru rezolvarea celor două probleme sînt folosite alogritme speciale speciale precum și algoritmele specifice problemelor de programare matematică

În activitatea practică apar însă situații în care nu ne este dată o informație completă despre fluxul din rețea. În asemenea situație se cere să alegem estimările fluxurilor pe arcele și drumurile rețelei.

În articolul de față aceasta este formulată ca o problemă de estimare statistică, ce se rezolvă cu ajutorul metodei verosimilității maxime.

Formularea problemei. Fie $G = (V, f, A)$ o rețea unde V este mulțimea nodurilor și A mulțimea arcelor.

Să notăm:

$$G_j = \{k \in V,\ (j, k) \in A\};\ G_{\sim}^{-1} = \{k \in V,\ (k, j) \in A\}$$

mulțimea nodurilor la care vin arce din nodul j respectiv mulțimea nodurilor din care pleacă arce spre j.

Deasemeni notăm φ_{ij} fluxul pe arcul $(i, j) \in A$ și d_{ij} un drum dintre i și j. În general φ_{ij} este o variabilă aleatoare despre care presupunem că are media μ_{ij} și deviația standard σ_{ij}; în mod obișnuit se presupune că este o variabilă normală $N(\mu_{ij}, \sigma_{ij})$. Cunoașterea în special a fluxului mediu μ_{ij} permite aplicarea algoritmelor clasici de determinare a rutei optimale (medii) în rețea, deci se impune ca fluxul mediu să fie cunoscut în prealabil.

Dacă $j \in V$, fluxul total care pleacă din j este dat de:

$$\varphi_{j\cdot} - \varphi_{\cdot j} = \sum_{k \in G_j} \varphi_{jk} - \sum_{i \in G_j^{-1}} \varphi_{ij} \tag{1}$$

Nodul j este generator de flux, absorbant de flux sau nod de trecere a fluxului după cum este respectiv pozitiv, negativ sau zero.

Întrucît φ_{ij} este o variabilă aleatoare este mai bine să presupunem că relaţia (1) se exprimă în termeni de medii, adică

$$\mu_{j\cdot} - \mu_{\cdot j} = \sum_{k \in G_j} \mu_{jk} - \sum_{i \in G_j^{-1}} \mu_{ij} \tag{1'}$$

Problemele fundamentale care se pun în legătură cu studiul probabilistic al fluxului sînt:

a) Cunoscîndu-se observaţiile $y_{ijk} = 1,2, ,..N_{ij}$ asupra fluxului φ_{ij} să se estimeze cantităţile medii μ_{ij}(în cazul cînd σ_{ij} sînt cunoscute sau nu) presupunîndu-se că fluxul total ce pleacă din nodul j

$$\mu_{j\cdot} - \mu_{\cdot j} = g_j \tag{2}$$

este cunoscut (adică g_j, $j \in V$, este cunoscut).

b) Cunoscîndu-se aceleaşi observaţii y_{ij} asupra fluxului în arce să se estimeze valoarea medie a fluxului pe un drum oarecare (a, b) adică să se estimeze $E[d(a, b)]$.

Problema *a*) este relativ mai simplă din punct de vedere al studiului statistic. Problema *b*) necesită însă anumite precizări care vor fi făcute la locul potrivit.

1. Estimaţia fluxului mediu prin arce.

Presupunem că pentru fiecare arc i, j se cunosc $N_{i,j}$ observaţii independente y_{ijk}, $1 \leqslant k \leqslant N_{ij}$ iar variabilele φ_{ij} sînt deasemenea independente. Fie $N = \sum_{(i,j \in V} N_{ij}$ şi să considerăm funcţia de verosimilitate

$$L = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}} \prod_{i,j \in V} (\sigma_{ij})^{N_{ij}}} e^{-1/2 \sum_{(i,j) \in V} \sum_{k=1}^{N_{ij}} \frac{(y_{ijk} - \mu_{ij})^2}{\sigma_{ij}^2}} \tag{3}$$

unde σ_{ij} sînt presupuse cunoscute.

Impunînd în (3) condiţia $L = \max$ cu restricţiile (2), rezultă că estimarea parametrilor statistici revine la următoarea problemă optimă:

$$\sum_{(i,j) \in V} \sum_{k=1}^{N_{ij}} \frac{(y_{ijk} - \mu_{ij})^2}{\sigma_{ij}^2} = \min \tag{4}$$

$$\mu_{j\cdot} - \mu_{\cdot j} = g_j$$

care este deci o problemă de minim cu legături. Prima relaţie (4) exprimă de fapt în forma clasică metoda celor mai mici pătrate.

Să ne oprim acum asupra unui anumit arc (i, j) unde dispunem de N_{ij} observaţii. Suma (4) care trebuie minimizată conţine ca termen suma

$$S_{ij} = \sum_{k=1}^{N_{ij}} \frac{(y_{ijk} - \mu_{ij})^2}{\sigma_{ij}^2} \tag{5}$$

Dacă notăm

$$x_{ij} = \frac{1}{N_{ij}} \sum_{k=1}^{N_{ij}} y_{ijk}$$

atunci

$$S_{ij} = \sum_{k=1}^{N_{ij}} \frac{(y_{ij} - x_{ij})^2}{\sigma_{ij}^2} + (x_{ijk} - \mu_{ij})^2 \sum_{k=1}^{N_{ij}} \frac{1}{\sigma_{ij}^2}$$

Dar ultima sumă este minimă (în raport cu) cînd $x_{ij} = \mu_{ij}$
Am ajuns deci la următoarea concluzie:
Teorema 1. Problema de minim cu legături (4) pentru determinarea estimației fluxului mediu este echivalentă cu problema

$$\sum_{(i,j)\in V} N_{ij} \frac{(x_{ij} - \mu_{ij})^2}{\sigma_{ij}^2} = \min. \tag{6}$$

$$\mu_{.j} - \mu_{.j} = g_j$$

Să studiem deci estimațiile μ_{ij} definite de (6). Se poate presupune că în a doua relație (6) j nu parcurge între V (adică nu se cunoaște fluxul care pleacă din fiecare nod).

Vom nota $v \in V$ mulțimea indiciilor pentru care restricțiile (6) sînt definite, adică problema de care ne ocupăm este:

$$\sum_{(i,j)\in V} \frac{(x_{ij} - \mu_{ij})^2}{\sigma_{ij}^2} = \min.$$

$$\mu_{.j} - \mu_{.j} = g_j, \; j \in v \subset V \tag{6'}$$

Pentru a defni vom utiliza metoda multiplicatorilor lui Lagrange. Avem deci de minimizat expresia:

$$S = \sum_{(i,j)\in V} \frac{(x_{ij} - \mu_{ij})^2}{\sigma_{ij}^2} + 2 \sum_{j\in V} \lambda_j (\mu_{j.} - \mu_{.j} - g_j) \tag{7}$$

unde σ_{ij} sînt presupuse cunoscute.

Derivînd în raport cu μ_{ij} și egalînd cu zero și ținînd seama de (1′) observăm că soluția care realizează optimul este

$$\mu_{ij}^* = \begin{cases} x_{ij} + \dfrac{\sigma_{ij}^2}{N_{ij}} (\lambda_j - \lambda_i) & (i,j) \in v \times v \\ x_{ij} + \dfrac{\sigma_{ij}^2}{N_{ij}} \lambda_j & (i,j) \in \overline{v} \times v \\ x_{ij} - \dfrac{\sigma_{ij}^2}{N_{ij}} \lambda_i & (i,j) \in v \times \overline{v} \\ x_{ij} & (i,j) \in \overline{v} \times \end{cases}, \quad \overline{v} = v_1 v \tag{8}$$

Dacă pentru orice $j \in \overline{v}$ luăm $\lambda_j = 0$ atunci soluția (8) devine:

$$\mu_{ij}^* = x_{ij} + \frac{\sigma_{ji}^2}{N_{ij}} (\lambda_j - \lambda_i), \; (i,j) \in v \tag{8'}$$

Această soluție este deci exprimată în termenii de multiplicatorii lui Lagrange λ_j unde $\lambda_j = 0$, $j \in V \mid v$. Rămîne să specificăm valorile multiplicatorilor ținînd seama de restricțiile (6′) care trebuie să fie satisfăcute, Deci trebuie să avem:

$$\mu^*_{j.} - \mu^*_{.j} = x_{j.} + \sum_{k \in G_j} \frac{\sigma^2_{jk}}{N_{ij}} \lambda_k - \lambda_j \sum_{k \in \sigma j} \frac{\sigma^2_{jk}}{N_{ii}} - x_{0j} -$$

$$- \lambda_j \sum_{i \in G_j^{-1}} \frac{\sigma^2_{ij}}{N_{ij}} + \sum_{i \in G_j^{-1}} \frac{\sigma^2_{ij}}{N_{ij}} \lambda_i = g_j, \; j \in v \tag{9}$$

unde notăm,

$$x_{j.} = \sum_{k \in G} x_{jk} \; ; \; x_{.j} = \sum_{i \in G_j} x_{ij}$$

Relațiile (9) definesc un sistem de ecuații în λ_j. Acest sistem se poate scrie matricial astfel:

$$\xi = \Lambda \lambda$$

unde ξ este un vector care are componentele $\xi_j = x_{j.} - g_j$, $j \in v$ iar matricea Λ are elementele

$$\Lambda_{j\rho} = \left\{ \begin{array}{ll} \sum\limits_{i \in G_j^-} \frac{\sigma^2_{ij}}{N_{ij}} + \sum\limits_{k \in G_j} \frac{\sigma^2_{jk}}{N_{jk}} & \text{pentru } \rho = j \\ -\frac{\sigma^2_{\rho j}}{N_{\rho j}} - \frac{\sigma^2_{j\rho}}{N_{j\rho}} & \text{pentru } \rho \in G_j^- \cap G_j \\ -\frac{\sigma^2_{\rho j}}{N_{\rho j}} & \text{pentru } \rho \in G_j^-/G_j \\ -\frac{\sigma^2_{j\rho}}{N_{j\rho}} & \text{pentru } \rho \in G_j/G_j^- \\ 0 & \text{pentru } \rho \in v/(G_j \cup G_j^-) \end{array} \right\} \text{pentru } \rho \neq j$$

Dacă matricea Λ are rangul maxim, atunci din (10) rezultă că

$$\lambda = \Lambda^{-1} \xi \tag{12}$$

Am demonstrat deci teorema.

T e o r e m a 2. Dacă matricea Λ definită de (11) are rangul maxim, σ_{ij} sînt cunoscute și x_{ij} sînt medii aritmetice ale fluxurilor arcelor (presupuse aleatoare independent) atunci estimațiile μ^*_{ij} ale mediilor fluxurilor pe arce μ_{ij}, care satisfac restricțiile din (6′) sînt definite de (8′) cu λ_j dați de (12).

Să vedem acum cum se poate sistematiza calculele sub forma unui algoritm de calcul care să conducă cu ușurință la determinarea estimațiilor medii μ^*_{ij}.

Vom nota cu p numărul nodurilor din V și q $(q > p)$ numărul nodurilor din v. Observăm că (9) se scrie:

$$\xi_j = \lambda_j \left(\sum_{i \in G_j^-} \frac{\sigma_{ij}^2}{N_{ij}} + \sum_{k \in G_j} \frac{\sigma_{jk}^2}{N_{jk}} \right) - \left(\sum_{i \in G_j^-} \lambda_i \frac{\sigma_{ij}^2}{N_{jk}} + \sum_{k \in G_j^-} \lambda_k \frac{\sigma_{jk}^2}{N_{ik}} \right) j \in v, \quad (13)$$

Să considerăm matricea Π ale cărei elemente sînt:

$$\Pi_{j\rho} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{k}\left(\frac{\sigma\rho_j^2}{N_{\rho j}} + \frac{\sigma_{j\rho}^2}{N_{j\rho}} \right) \text{pentru } \rho \in G_j^- \cap G_j \\ \frac{1}{k} \cdot \frac{\sigma\rho_i}{N_{\rho j}} \text{ pentru } \rho \in G_j^- / G_j \\ \frac{1}{k} \cdot \frac{\sigma_{j\rho}}{N_{j\rho}} \text{ pentru } \rho \in G_j / G_j^- \\ 0 \text{ pentru } \rho \in \nu / (G_j \cup G_j^-) \\ 0 \text{ pentru } \rho = j \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{pentru} \\ \rho \neq j \end{array}$$

$$\text{unde } k = \sum_{i \in G_j^-} \frac{\sigma_{ij}^2}{N_{ij}} + \sum_{k \in G_j} \frac{\sigma_{jk}^2}{N_{jk}}$$

și să definim:

$$\overline{\xi} = \frac{\xi_j}{\sum_{i \in G_j^{-1}} \frac{\sigma_{ij}^2}{N_{ij}} + \sum_{k \in G_j} \frac{\sigma_{ij}^2}{N_{jk}}}, \quad j \in v \quad (15)$$

Atunci (13) devine

$$\overline{\xi}_j = \lambda_o - \sum_{k \in v} \Pi_{jk} \lambda_k \quad (16)$$

care sub formă matricială se scrie astfel:

$$\overline{\xi} = \lambda - \Pi \lambda$$

sau

$$\overline{\xi} = (I - \Pi) \lambda \quad (17)$$

Matricea Π are ordinul q și $\sum_k \Pi_{jk} \leqslant 1$

Din (17) rezultă că

$$\lambda = (I - \Pi)\overline{\xi}^1 = (I + \Pi + \Pi^2 + \ldots)\, \overline{\xi} \quad (18)$$

de unde se deduce următorul procedeu interativ de calcul al lui λ.

$$\lambda^{(1)} = \overline{\xi}; \quad \lambda^{(l-1)} = \overline{\xi} + \Pi \lambda^{(l-1)}, \; l = 2, 3, \ldots \quad (19)$$

Într-adevăr din (19) avem,

$$\lambda^{(l)} = (I + \Pi + \ldots + \Pi^{l-1})\,\overline{\xi}$$

Dacă seria din paranteză converge, atunci $\lim\limits_{l\to\infty} \lambda^{(l)} = \lambda$

În concluzie problema estimării fluxului pe care într-o rețea este complet rezolvată.

2. Estimarea fluxului pe drumuri,

Fie un drum $d(a, b)$ în rețea; presupunem că $d(a, b) = \{(a, i_1)\ldots(i_{n-1}, b)\}$ adică drumul constă din n arce independente.

Să notăm cu Φ_{ab} fluxul pe drumul de la a la b Φ Deci

$$\Phi_{ab} = \varphi_{ai1} + \varphi_{i1,\,i2} + \varphi_{in-1,\,b}$$

adică Φ_{ab} este suma a, n variabile, aleatoare. Pentru simplificare vom nota

$$a = i_0,\ b = i_n.$$

Evident dacă fluxurile pe arce sînt presupuse independente avem

$$d = E(\Phi_{ab}) = \sum_{j=1}^{n} \varphi_{ij-1},\ i_j$$

$$\sigma^2 = D^2(\Phi_{ab}) = \sum_{j=1}^{n} \sigma^2_{ij-1}, i_j \tag{20}$$

iar în ipoteza de normalitate făcută Φ_{ab} are repartiția normală $N(d, \sigma)$. Să presupunem acum că fluxul mediu pe arce μ_{ls} se estimează conform relației (8′) unde λ_j derivă din (12). Să notăm

$$\overline{d} = \sum_{j=1}^{n} \mu^*_{ij-1},\ ij$$

O problemă interesantă care s-ar pune este să se studieze $E\,(\overline{d})$ și să se evalueze corecția sa față de d.

Deoarece

$$E(\lambda_i) = \sum_j \Lambda^{-1}_{ij} g_j - \sum_j \Lambda^{-1}_{ij} g_j = 0$$

rezultă că μ^*_{ij} este o estimație nedeplasată pentru μ_{ij} întrucît

$$E(\mu^*_{ij}) = E(x_{ij}) + \frac{\sigma^2_{ij}}{N_{ij}}\ (0 - 0)$$

În concluzie

$$E(\overline{d}) = d$$

deci $\overline{d}$ este o estimație nedeplasată a lui d.

Să vedem acum cum exprimă dispersia lui $\overline{d}$.

Avem,

$$D^2(\mu^*_{ij}) = D^2(x_{ij}) + \frac{\sigma^4_{ij}}{N_{ij}} D^2(\lambda_i - \lambda_j) + 2\,\frac{\sigma^2_{ij}}{N_{ij}} \operatorname{Cov}(x_{ij}),\ \lambda_i - \lambda_j) \tag{22}$$

unde

$$D^2(x_{ij}) = \frac{\sigma^2_{ij}}{N_{ij}} \tag{23}$$

Deoarece

$$\begin{cases} \lambda_i - \lambda_j = \sum\limits_l \Lambda^*_{ij,l}\,(x_{l.} - x_{.l} - g_l) \\ \Lambda^*_{ij,l} = \Lambda^{-1}_{il} - \Lambda^{-1}_{jl} \end{cases}$$

Rezultă că:

$$D^2(\lambda_i - \lambda_j) = \sum_l \Lambda^{*2}_{ij,l}\, D^2(x_{l.} - x_{.l})$$

$$\text{Dar } D^2(x_{l.} - x_{.l}) \approx \sum_{s \in G_l^-} \left(\frac{\sigma^2_{ls}}{N_{l_s}} + \sum_{s \in G_l^-} \frac{\sigma^2_{sl}}{N_{l_s}} \right); \tag{24}$$

Conform inegalității lui Schwartz

$$|\operatorname{Cov}(x_{ij},\ \lambda_i - \lambda_j)| \leqslant \sqrt{D^2(x_{ij})\, D^2(\lambda_i - \lambda_j)}; \tag{25}$$

Dacă volumul selecției N_{ij}, cu care se calculează mediile aritmetice tind la infinit pentru orice i și j din v, atunci din (22) — (25) rezultă că

$$D^2(\mu^*_{ij}) \to 0.$$

Deci ținînd seama și de (21) rezultă *teorema* 2. Estimația d este absolut corectă pentru $\overline{d}$ dacă σ_{ij} sînt presupuse cunoscute și finite.

În concluzie estimarea fluxului pe drumuri este o problemă rezolvată, dacă se cunosc estimațiile absolut corecte ale fluxului pe arce.

BIBLIOGRAFIE

[1.] Fulkerson D.R. and Danzig G.B.—„*Computation of maximal flows in networks*" — Nav. Res. Logistic Quart. (1955)

[2.] Iosifescu M., Mihoc Gh., Theodorescu R,, — „*Teoria probabilităţilor şi statistica matematică*„: Bucureşti, Edit. Tehnică, 1966.

[3.] Mihoc Gh., Ciucu N., „*Elemente de teoria probabilităţilor şi statistică matematică*" Bucurerti, Edit. Dıdactică 1963.

LA DÉTERMINATION DU FLUX MOYEN DANS UN RÉSEAU

L'article s'occupe du problème de la détermination du flux moyen à l' interieur d'un réseau probabilistique.

Le problème est formulé en tant qu'un problème d'estimation statistique et resolu à l'aide de la méthode de la vraisemblance maxime.

Primit la
18.IX.1971

Academia de Ştiinţe
Economice
Bucureşti

O REPREZENTARE STOCASTICĂ A MECANISMULUI DESCOMPUNERII CHIMICE MONOMOLECULARE

D. FIRESCU, A. MUJA, A. ARSIN

Studiile intreprinse de Bartholomay [2], Rosen [8]. Oppenheim, Schuler, Weiss [7], evidențiază superioritatea metodelor stachastice față de cele deterministe, în investigarea mecanismelor reacțiilor chimice.

Reprezentarea deterministă a procesului real al reacției chimice se întemeiază pe ipoteza că desfășurarea sa este generată de legi dinamice. În acest caz reprezentarea procesului empiric este unică, iar evoluția lui este complect determinată. Capacitatea de predicție a modelului determinist este deci limitată.

Construirea modelelor stochastice, care țin seama de elementul aleator existent în natura intimă a procesului considerat, proces a cărui desfășurare este guvernată de legi probabiliste, este evident mai indicată.

Studiul stochastic al cineticii reacțiilor chimice conduce în mod natural la interpretarea acestora ca procese de servire [1, 3]. Se obțin astfel informații mai complete asupra desfășurării reacției.

În lucrarea de față propunem un model de servire polifazic pentru descrierea mecanismului descompunerii monomoleculare. Modelarea se bazează pe următoarele ipoteze [5] admise în cinetica chimică.

a) Molecula este considerată ca un ansamblu de k oscilatori, statistic independenți. Energiile celor k oscilatori sînt variabile aleatoare independente.

b) O moleculă devine capabilă să se descompună monomolecular numai ln cazul cînd la toate gradele de libertate de vibrație ale moleculei se acumuîează o anumită energie cinetică E_c. Este esențial faptul că nu există nici o preferință pentru acumularea unui anumit procent de energie pe un grad de libertate oarecare.

c) Atingerea energiei cinetice E_c constituie o condiție necesară și suficientă pentru activare. Deosebirile în capacitatea de reacție a moleculelor care posedă un exces de energie în comparație cu E_c nu se iau în considerare.

Interpretăm procesul de activare a moleculelor drept un proces de servire $M \mid M \mid S$ cu S stații în paralel. Cele $S \in N^*$ molecule N-atomice ale substanței ce se descompune, constituie S surse de cerințe. Oscilatorii reprezintă cerințele ce urmează a fi servite. Fluxul de intrare este poissonian de parametru λ, iar numărul de cerințe dintr-un flux oarecare este $n = 3N$-6. Servirea oscilatorului i ($i = 1, 2..., n$) se realizează în m_i faze; în fiecare fază

oscilatorul i primeşte cîte o cuantă de energie $h\nu$, astfel încît după încheierea fazei m_i el posedă energia $E = m_i h\nu$.

Perioada de servirea a cerinţei i ($i = 1, 2..., n$) se poate încheia fie prin satisfacerea completă a cererii, fie prin nesatisfacerea ei. Cererea este complet satisfăcută dacă — în ipoteza că o moleculă este activă atunci cînd posedă în total m cuante de energie — la terminarea serviciului în faza m_i oscilatorul i are energia $m_i h\nu$ iar ceilalţi n-1 oscilatori au energia totală $(m-m_i)\, h\nu$. În caz contrar cererea nu este satisfăcută.

Timpul de servire al unei cerinţe într-o fază oarecare este o variabilă aleatoare independentă, cu repartiţia exponenţială negativă de parametru $\mu = \frac{h\nu}{KT}$ (K = constanta lui Boltzmann, T = temperatura absolută $0°K$).

Deoarece servirea cerinţelor celor $S \in N^*$ fluxuri diferite se face în mod independent, în fiecare moment sistemul poate fi caracterizat printr-o stare E_m unde m reprezintă numărul total al fazelor de servire ale cerinţelor existente în sistem dintr-un flux oarecare.

Introducem notaţiile:

π_{m_i} — probabilitatea ca servirea cerinţei $i (i = 1, 2 \ldots n)$ să se realizeze în m_i faze ($m_i = 1, 2 \ldots$); $P_m(t)$ — Probabilitatea ca la momentul $t (t > 0)$ sistemul să se afle în starea E_m.

Studiind comportarea sistemului în intervalul de timp $(t, t + \Delta t)$ obţinem ecuaţiile de stare

$$\frac{dP_0(t)}{dt} = -\lambda P_0(t) + \mu P_1(t)$$

$$\frac{dP_m(t)}{dt} = -(\lambda + \mu) P_m(t) + \mu P_{m+1}(t) + \lambda \sum_{m_i=0}^{m} \pi_{m_i} P_{m-i}(t), \quad m \geqslant 1$$

Introducînt funcţia generatoare

$$F(s, t) = \sum_{m=0}^{\infty} P_m(t)\, s^m \qquad |s| \leqslant 1 \tag{1}$$

şi ţinînd seama că

$$F(s, o) = s^{m_i},$$

obţinem:

$$s \frac{\partial F(s, t)}{\partial t} = \left[\mu - (\lambda + \mu) s + \lambda s \sum_{m_i=1}^{\infty} \pi_{m_i} s^{m_i} \right] F(s, t) + \mu (s - 1)\, P_0(t) \tag{2}$$

Cu ajutorul transformatei Laplace $\Phi(s, p)$ a funcţiei $F(s, t)$, ecuaţia (2) devine:

$$\Phi(s, p) = \frac{s^{m_i+1} + \mu(s-1)\, \Phi(o, p)}{(\lambda + \mu + p)\, s - \mu - \lambda s \sum_{m_i=1}^{\infty} \pi_{m_i} s^{m_i}}$$

De aici rezultă

$$P_0(t) = \frac{1}{\mu t} e^{-(\lambda+\mu)t} \sum_{\alpha=m_i+1}^{\infty} \alpha \left[\frac{(\mu t)^\alpha}{\alpha!} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(\lambda t)^m}{m!} \sum_{m_i=0}^{\infty} Q_{m,\, m_i} \frac{(\mu t)^{m_i+m+\alpha}}{(m_i+m+\alpha)!} \right]$$

unde

$$\sum_{m_i=0}^{\infty} Q_{mm_i} a^{m_i} \equiv \left(\sum_{m_i=1}^{\infty} \pi_{m_i} a^{m_i-1} \right)^m .$$

Pentru

$$\pi_{m_i} = \begin{cases} 1, \text{ dacă } m_i = \dfrac{m}{m-1} = \nu \in N^* \\ 0, \text{ dacă } m_i \neq \nu \in N^*, \end{cases}$$

avem

$$Q_{mm_i} = \begin{cases} 1, \text{ dacă } m_i = \mathrm{n} \\ 0, \text{ dacă } m_i = \nu \end{cases}$$

$$P_0(t) = 2 \sum_{\alpha=m_i+1}^{\infty} \alpha \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^{\frac{1-\alpha}{\nu+1}} \cdot \frac{e^{-(\lambda+\mu)\, t}}{\beta} J_{\alpha,\, \nu}(\beta)$$

cu

$$\beta = 2\mu t \left(\frac{1}{\mu} \right)^{\frac{1}{\nu+1}}$$

$$J_{\alpha,\, \nu}(\beta) = \sum_{m=o}^{\infty} \frac{\left(\frac{\beta}{2} \right)^{\alpha+m(\nu+1)}}{m!(\alpha + m\nu)!}$$

În continuare, cunoscînd repartiția timpului de servire

$$H(u) = \sum_{m_i=1}^{\infty} \pi_{m_i} e^{-\mu u} \frac{(\mu u)^{m_i+1}}{(m_i - 1)!} \mu \tag{3}$$

se determină probabilitatea $P(\tau, t)\, d\tau$ ca servirea unei cerințe care sosește în momentul $t (t > 0)$ să se termine în intervalul $(\tau, \tau + d\tau)$ $\tau > \mathrm{t}$.

Într-adevăr

$$P(\tau, t)\, d\tau = \sum_{m=1}^{\infty} P_m(t)\, e^{-\mu t} \frac{(\mu t)^{m-1}}{(m-1)!} \mu d\tau + P_0(t)\, \delta(\tau)\, d\tau, \tag{4}$$

unde $\delta(\tau)$ este funcția Delta. Dacă $\lambda(p)$ și $\Psi(p, t)$ sînt respectiv transformatele Laplace ale funcțiilor $H(u)$ și $P(\tau, t)$, ținînd seama de (1), din relația (4) obținem

$$\frac{\partial \psi(p, t)}{\partial t} + \{\lambda[1 - \lambda(p)] - p\}\, \Phi(p, t) + pP_0(t) = 0$$

În regim staționar avem

$$\Psi(p) = \frac{1 - \frac{\lambda}{\mu} \sum_{m_i=0}^{\infty} m_i \pi_{m_i}}{1 - \frac{\lambda}{p(1-\chi(p)}}$$

Dacă fiecare cerință necesită același număr r de faze de serviciu atunci $\pi_{m_i} = \delta_j . m_i$($\delta m_i$ — simbolul lui Kronecker), iar

$$\chi(p) = \left(\frac{\mu}{\mu + p}\right)^r$$

și deci

$$\Psi(p) = \frac{1 - \frac{r\lambda}{\mu}}{1 - \frac{\lambda}{p\left(1 - \left(\frac{\mu}{\mu + p}\right)^r\right)}}$$

Dacă $\lim_{t \to \infty} P_m(t) = P_m$, ecuațiile modelului rezultă imediat și ele se pot rezolva cu ușurință.

Admițînd că o anumită cerință este servită complet în m_i faze iar celelalte n-1 cerințe sînt servite în $m - m_i$ stații rezultă că probabilitatea corespunzătoare este

$$\frac{(m - m_i + n - 1)!\, m!}{(m - m_i)!\,(m + n - 1)!}$$

Recunoaștem aici expresia probabilității ca, în ipoteza că n oscilatori posedă în total m cuante, unui oscilator i ($i = 1, 2, \ldots, n$) să-i revină m_i cuante.

Dacă notăm $h^*(v)$ și $h(v)$ densitatea de probabilitate a timpului dintre două sosiri succesive și respectiv — densitatea de probabilitate a timpului de servire, rezultă că densitatea de probabilitate $W(x)$ a timpului de așteptare este

$$W(x) = \int_x^{\infty} h^*(y - x)\, h(y)\, dy$$

Ținînd seama că pentru modelul considerat avem

$$h(y) = e^{-r\mu y} \frac{(r\mu)^r y^{r-1}}{(r-1)!}$$

$$h^*(z) = \lambda e^{-\lambda z}$$

rezultă

$$W(x) = \int_0^{\infty} \lambda \frac{(r\mu)^r}{(r-1)!} y^{r-1} e^{\lambda x} e^{-(\lambda + r\mu) y}\, dy \qquad (x \geqslant 0)$$

de unde, după efectuarea calculelor obținem

$$W(x) = \lambda \left(\frac{\mu r}{\lambda + r\mu}\right)^r e^{-r\mu x} \sum_{j=0}^{r-1} \frac{[x(\lambda + r\mu)]^j}{j!} \quad (x \geqslant 0) \tag{5}$$

Notînd

$$\varphi(iw) = \int_{-\infty}^{\infty} W(x) e^{-iwx}\, dx$$

transformata Fourier a funcției W și ținînd seama de (5) obținem:

$$\varphi(iw) = \lambda \left(\frac{\mu r}{\lambda + rp}\right)^r \left[\int_{-\infty}^{0} e^{(\lambda - iw)x}\, dx + \int_0^{\infty} e^{-(r\mu + iw)x} \cdot \sum_{j=0}^{r-1} \frac{[x(\lambda + r\mu)]^j}{j!}\, dx\right]$$

sau

$$\varphi(i, w) = \lambda \left(\frac{\mu r}{\lambda + \mu r}\right)^r \left[\frac{1}{\lambda - i\omega} + \sum_{j=0}^{r-1} \frac{(\lambda + r\mu)^j}{(r\mu + i\omega)^{j+1}}\right] \tag{6}$$

Luînd acum $a = iw$, $u = \frac{r\mu + a}{r\mu}$, $b = \frac{\lambda}{r\mu} = \frac{\rho}{r}$ relația (6) devine

$$\frac{1}{1 - \varphi(a)} = -\frac{u^r(1 + b - u)}{u^{r+1} - (1 + b)\, u^r + b}$$

care se mai scrie

$$\frac{1}{1 - \varphi(a)} = -\frac{u^r(1 + b - u)}{(u - 1)(u - u_1) \ldots (u - u^1)} \tag{7}$$

unde $u_1, \ldots, u_a$ sînt rădăcinile ecuației

$$u^r - b(u^{r-1} + u^{r-2} + \ldots + 1) = 0$$

Relația (7) arată că $1 - \varphi(i\omega)$ se poate pune sub forma

$$\frac{A_1(\omega)(\omega - \omega_1) \ldots (\omega - \omega_\alpha{}^r)}{A_2(\omega)}$$

unde $w_1, \ldots, w_\alpha$ sînt zerourile funcției. Rezultă că transfomata Fourier a repartiției timpului de așteptare W este:

$$\frac{A_2(\omega)\, B(\omega)}{(\omega - \omega_1) \ldots (\omega - \omega_\alpha)}$$

unde $B(w)$ este un polinom convenabil ales.
Luînd în (7)

$$\frac{1}{1 + b - \mu} = \frac{r\mu}{\lambda - i\omega} = A_1(w)$$

$$u^r = \left(1 + \frac{i\omega}{r\mu}\right)^r = A_2(w)$$

și $B(\omega) = -B$ (constant) rezultă că transformata Fourier a funcției W este

$$\frac{Bu^r}{(u-1)(u-u_1)\dots(u-u_n)}\left(u = 1 + \frac{i\omega}{r\mu}\right)$$

Dacă înlocuim pe u prin $\frac{a}{r\mu}$ această expresie reprezintă transformata Laplace $\{\alpha W(t)\}$ a repartiției W, care se scrie

$$\frac{B\mu r}{1-\rho}\left[\frac{1}{a} + \sum_{j=1}^{r} \frac{C_j}{a - a_i}\right],$$

cu $A_j (j = 1, \dots, r)$ constante.
Aplicînd acum teorema de dezvoltare a lui Heaviside obținem:

$$W(t) = \frac{Br\mu}{1-\rho}\left[1 + \sum_{j=1}^{r} C_j e^{a_j t}\right].$$

Deoarece $|a_j| < 0$, $|u_j| < 1$ și $a_j = r\mu(\mu_j - 1)$, termenii exponențiali din expresia de mai sus sînt finiți pentru orice $t > 0$ și deci rezultă că $\lim_{t\to\infty} W(t) = 1$.

Probabilitatea $1 - W(t)$ ca o cerință să aștepte serviciul un timp $\theta > t$ $(t > 0)$ este

$$1 - W(t) = \sum_{j=1}^{n} \bar{C}_j e^{-r(1-u_j)\mu t},$$

unde

$$\bar{C}_j = \frac{(1-\rho)u_j}{r + \rho - (r+1)u_j}.$$

BIBLIOGRAFIE

1. E.A. Bartholomay *Stochastic Models for Chemical Reactions*, Bull. Math-Biophys 20, 1958, p. 175—182.
2. *A Stochastic Approach to Statistics Kinetics with Application to Enzime Kinetics*, Biochemistry, 1, 2, 1962, p. 223—230.
3. D. Firescu, A. Muja P. Balea *Asupra unei reprezentări stocastice a proceselor catalitice*, Analele Univ. București. Mat. Mec. XVII, 1, 1968 p. 61—68.
4. D. Firescu D. Negoiu *Un model stocastic în cinetica reacțiilor chimice*. An. Univ. București, Mat. Mec. XIV, 2. 1965 p. 145—150.
5. N.C. Hinshelwood *The Kinetics of Chemical Change*, Oxford Press, New-York, 1940
6. L. Kassel Kinetics of Homogeneous Gas Reactions, Paris, Dunod, 1961.

7. I. Oppenheim, K.E. Shuler, C.H. Weiss *Stochastic and Deterministic Formulation of Chemical Rate Ecuations*, J. Chem. Phys. 50, 1 1969, pg. 460—466.
8. R. Rosen *On the Role of Chemical Systems in the Microphysical Aspects of Primary Genetic Mechanisms*, Bull. Math. Biophys. 23, 1961, 393—403.
9. *L.* Takács *Introduction to the Theory of Quenes*, Oxford University Press, 1962

EINE STOCHASTICHE DARLEGUNG DER MECHANISCHEN — CHEMISCHEN — MONOZELLEN ZERSETZUNG

Zusammeu fassung

Es vereinigen sich ein polyphasisches Service-Modell für die mechanische Wartung der monozellen Zersetzung, welches des Tätigkeits-Verfahren der Moleklüen als ein Service-Prozess Übernimmt. Es entstehen Gleichungen und Lösungen, bestimmend verschiedene Merkmale desselben. Es werden Betrachtungen üer das asymptotische Verhältnis eingezogen.

Primit la 10. XI. 1971

Universitatea București
Facultatea de Chimie

TOPOLOGIEN AUF RÄUMEN VON TEILMENGEN

P. KESSLER

Auf dem Raum $P_0(X)$ aller nichtleeren Teilmengen einer Menge X werden drei Arten von Topologien studiert.

Einleitung. Es sei X eine nichtleere Menge. Mit $P(X)$ $(P_0(X))$ bezeichnen wir die Menge aller (nichtleeren) Teilmengen von X. Auf $P_0(X)$ kann man folgendermassen Topologien einführen:

Es seien γ und σ Teilsysteme von $P(X)$, die $\emptyset$ und X enthalten. Bezeichnet man mit $\langle A\rangle$, $\rangle A\langle$ die Systeme

$$\langle A\rangle = \{M \in P_0(X) : M \cap A = \emptyset\}$$

$$\rangle A\langle = \{M \in P_0(X) : M \cap A \neq \emptyset\}$$

wo $\langle\emptyset\rangle = P_0(X)$, $\langle X\rangle = \emptyset$, $\rangle\emptyset\langle = \emptyset$, $\rangle X\langle = P_0(X)$

gesetzt wird, dann kann man mit

$$\{\langle A\rangle : A \in \gamma\}$$

bzw.

$$\{\rangle S\langle : S \in \sigma\}$$

als Subbasen je eine Topologie τ^γ bzw. τ_σ auf $P_0(X)$ definieren.

Die Topologien τ^γ bzw. τ_σ verallgemeinern dann die so genannte *„upper semi-finite topology"* bzw. *„lower semifinite topology"* von E. Michael [7]. Allgemeine Topologien τ^γ wurden bereits von J. Flachsmeyer [2] und H. Poppe [8], [9] betrachtet; die Topologie τ_σ findet man in den Arbeiten von M. M. Marjanovic [6]. Diese Topologien werden in den vorher erwähnten Arbeiten fast ausschliesslich auf dem Raum der abgeschlossenen Teilmengen eines topologischen Raumes betrachtet. Dabei haben sie manchmal schon auf $P_0(X)$ ganz interessante Eigenschaften. Indem man von allgemeinen Systemen γ und σ ausgeht, ist man in $P_0(X)$ nicht an eine gegebene Topologie des Grundraumes X gebunden. Nimmt man weiter γ als Subbasis der abgeschlossenen Mengen einer Topologie auf X und σ als Subbasis der offenen Mengen einer Topologie auf X an, so kann man umgekehrt von Topologien auf $P_0(X)$ auf Topologien auf X schliessen.

Wir leiten, von diesem Standpunkt ausgehend, einige Eigenschaften der Topologien σ_γ und σ_σ ab. Dabei interessieren uns insbesonders Abzählbarkeits, Trennungs — und Kompaktheitseigenschaften dieser Topologien.

Zum Abschluss betrachten wir noch das Supremum τ_σ^γ einer Topologie τ^γ und einer Topologie τ_σ.

Wir betrachten im folgenden nur Räume nichtleerer Mengen. Entsprechende Aussagen können auch für Räume die die leere Menge enthalten ausgesprochen werden.

1. Die Topologien τ^γ, γ kann stets als Subbasis für die abgeschlossenen Mengen in Bezug auf eine Topologie auf X betrachtet werden. Wir bezeichnen diese Topologie mit $\mathcal{T}^\gamma$ (In einem topologischen Raum bezeichnen wir mit Topologie die Menge seiner offenen Teilmengen) Mit $F^\gamma(X)$ (bzw. $F_0^\gamma(X)$) bezeichnen wir das System aller abgeschlossenen (bzw. nichtleeren abgeschlossenen) Teilmengen des Raumes $(X, \mathcal{T}^\gamma)$. Ersetzt man γ durch das System γ^* aller endlichen Vereinigungen der Mengen aus γ, so ist γ^* eine Basis für die abgeschlossenen Mengen aus $(X, \mathcal{T}^\gamma)$, $\{\langle A\rangle : A \in \gamma^*\}$ eine Basis für die offenen Mengen aus $(P_0(X), \tau^\gamma)$ und es ist $\tau^\gamma = \tau^{\gamma^*}$. Auf Grun dieser letzten Eigenschaft setzen wir von nun an stets voraus, dass γ schon endlich vereinigungsabgeschlossen ist, d.h. mit $A, B \in \gamma$ ist auch $A \cup B$ in γ enthalten.

Für zwei topologisch äquivalente Basen γ_1 und γ_2 müssen die Topologien τ^{γ_1} und τ^{γ_2} nicht unbedingt übereinstimmen. (siehe z. B. [6] 2.2). In dieser Richtung hin gilt folgender Satz:

SATZ 1.1. Es sei $\mathcal{F}$ ein Teilsystem von $P_0(X)$ das alle einpunktigen Teilmengen von X enthält. Auf $\mathcal{F}$ ist dann und nur dann $\tau^{\gamma_1} = \tau^{\gamma_2}$ wenn es für jede Menge $M \in \mathcal{F}$ und jedes $A \in \gamma_1$ mit $M \subset X - A$ ein $B \in \gamma_2$ mit $M \subset X - B \subset X - A$ und für jedes $B \in \gamma_2$ mit $M \subset X - B$ ein $A \in \gamma_1$ mit $M \subset X - A \subset X - B$ gibt.

Zwei Systeme γ_1 und γ_2, die der Bedingung des Satzes 1.1. genügen, nennen wir äquivalent auf $\mathcal{F}$. Wenn $\mathcal{F}$ alle einpunktigen Teilmengen von X enthält, so sind zwei auf äquivalente Systeme γ_1 und γ_2 auch topologisch äquivalent, d.h. γ_1 und γ_2 sind Basen für die abgeschlossenen Mengen derselben Topologie auf X.

Beweis des Satzes: Auf $\mathcal{F}$ sei $\tau^{\gamma_1} = \tau^{\gamma_2}$. Für $M \in \mathcal{F}$ und $A \in \tau_1$ mit $M \subset X - A$ ist dann $M \in \langle A\rangle$ und $\langle A\rangle \in \tau^{\gamma_1}$. Folglich gibt es ein $B \in \gamma_2$ so dass $M \in \langle B\rangle \subset \langle A\rangle$ ist. Da $\mathcal{F}$ alle einpunktigen Teilmengen enthält, folgt dann $M \subset X - B \subset X - A$. Genau so zeigt man dass auch für ein $B \in \gamma_2$ mit $M \subset X - B$ ein $A \in \gamma_1$ mit $M \subset X - A \subset X - B$ existiert.

Es sei nun die Bedingung des Satzes erfüllt und A sei beliebig aus γ_1 gewählt. Wir können dann $\langle A\rangle \neq \emptyset$ auf $\mathcal{F}$ voraussetzen. Es sei M aus $\mathcal{F}$ und $M \in \langle A\rangle$. Dann ist $M \subset X - A$ und somit gibt es ein $B \in \gamma_2$ mit $M \subset X - B \subset X - A$, also $M \in \langle B\rangle \subset \langle A\rangle$. Da M beliebig aus $\langle A\rangle$ gewählt wurde, folgt dann $\langle A\rangle \in \tau^{\gamma^2}$, also $\tau^{\gamma_1} \subset \tau^{\gamma_2}$. Genau so folgt auch $\tau^{\gamma_2} \subset \tau^{\gamma_1}$ und folglich ist $\tau^{\gamma_1} = \tau^{\gamma_2}$ auf $\mathcal{F}$.

Aus Satz 1.1. folgt nun

SATZ 1.2. Auf $P_0(X)$ ist dann und nur dann $\tau^{\gamma_1} = \tau^{\gamma_2}$ wenn $\gamma_1 = \gamma_2$ ist.

Beweis. Ist γ_1 äquivalent mit τ_2 auf $P_0(X)$ und $A \in \gamma_1$ dann folgt aus $X - A \in \langle A \rangle$ dass es ein $B \in \gamma_2$ mit $X - A \in \langle B \rangle \subset \langle A \rangle$ gibt. Daraus folgt jedoch $X - B = X - A$ und somit $A = B \in \gamma_2$

SATZ 1.3. Ist $(X, \mathcal{T}^\gamma)$ ein T_1 — Raum, so ist auf $F_0^\gamma(X)$ dann und nur dann $\tau^\gamma = \tau^{F^\gamma(X)}$ wenn γ mit $F^\gamma(X)$ auf $F_0^\gamma(X)$ äquivalent ist. (also wenn es für jede nichtleere abgeschlossene Menge F und jede offene Menge G aus $(X, \mathcal{T}^\gamma)$ mit $F \subset G$ ein A aus γ mit $F \subset X - A \subset G$ gibt).

Da $\{\langle A \rangle : A \in \gamma\}$ schon eine Basis der Topologie $\mathcal{F}^\gamma$ ist kann man leicht Bedingungen unter denen $(P_0(X), \tau^\gamma)$, oder einer seiner Unterräume, dem 1. oder 2. Abzählbarkeitsaxiom genügt, ableiten.

Wir betrchten zunächst für den allgemeinen Fall das 2. Abzählbarkeitsaxiom.

SATZ 1.4. Es sei $\mathcal{F}$ ein Teilsystem von $P_0(X)$, das alle einpunktigen Teilmengen von X enthält. $(\mathcal{F}, \tau^\gamma)$ genügt dann und nur dann dem 2. Abzählbarkeitsaxiom, wenn γ mit einem seiner abzählbaren Teilsysteme auf $\mathcal{T}$ äquivalent ist.

Beweis $(\mathcal{F}, \tau^\gamma)$ genüge dem 2. Abzählbarkeisaxiom. Dann enthält τ ein anzählbares Teilsystem γ_1 (γ_1 kann gleich von Anfang an vereinigungsabegeschlossen gewählt werden), so dass schon $\{\langle A \rangle : A \in \gamma_1\}$ eine Basis der Topologie τ^γ ist[1]. Es ist also $\tau^\gamma = \tau^{\gamma_1}$ und somit γ mit γ_1 auf $\mathcal{F}$ äquivalent.

Umgekehrt, genügt $(\mathcal{F}, \tau^\gamma)$ offensichtlich dem 2. Abzählbarkeitsaxiom, wenn γ mit einem seiner abzählbaren Teilsystem auf $\mathcal{F}$ äquivalent ist.

Aus diesem Satz folgt dann

SATZ 1.5. $(P_0(X), \tau^\gamma)$ genügt dann und nur dann dem 2. Abzählbarkeitsaxiom, wenn γ abzählbar ist.

Für einen topologischen Raum $(X, \mathcal{T})$ bezeichnen wir mit $F(X)$, bz. $K(X)$; $E(X)$ das System aller abgeschlossenen, bzw. aller kompakten, bzw. aller endlichen Teilmengen des Raumes $(X, \mathcal{T})$. Mit $F_0(X)$ bezeichnen wir das System aller nichtleeren abgeschlossenen Teilmengen aus $(X, \mathcal{T})$.

Aus Satz 1.4. folgt dann

SATZ 1.6. Ist $(X, \mathcal{T})$ ein T_1 — Raum, so genügt $(F_0(X), \tau^{F(X)})$ dann und nur dann dem 2. Abzählbarkeitsaxiom, wenn $(X, \mathcal{T})$ dem Axiom D_2 genügt.

Ein Raum $(X, \mathcal{T})$ genügt dem Axiom D_2 von Aull [1], wenn $F(X)$ mit einem seiner abzählbaren Teilsysteme auf $F_0(X)$ äquivalent ist.

Jeder $\mathcal{T}_1$ — Raum, der dem Axiom D_2 genügt, genügt auch dem 2. Abzählbarkeitsaxiom. Umgekehrt, genügt jeder kompakte Raum, der dem 2. Abzählbarkeitsaxiom genügt, auch dem Axiom D_2. Aus diesen Bemerkungen olgt dann folgende Eigenschaft.

---

[1]) [3] Seite 86, I.E

SATZ 1.7. Ist $(X, \mathfrak{T})$ ein kompakter T_1 — Raum, so genügt $(F_0(X), \tau^{F(X)})$ dann und nur dann dem 2. Abzählbarkeitsaxiom, wenn auch $(X, \mathfrak{T})$ diesem Axiomgenügt.

In einem noch spezielleren Fall erhalten wir

SATZ 1.8. $(X, \mathfrak{T})$ ein regulärer T_1 — Raum, so genügt $(F_0(X), \tau^{F(X)})$ dann und nur dann dem 2. Abzählbarkeitsaxiom, wenn $(X, \mathfrak{T})$ kompakt matrisierbar ist.

Beweis: Folgt aus Satz 1.3. und [1] Theorem 13.

Es sei nun $\gamma = K(X)$.

SATZ 1.9. Ist $(X, \mathfrak{T})$ ein T_1-Raum, so genügt $(F_0(X), \tau^{K(X)})$, dann und nur dann dem 2. Abzählbarkeitsaxiom, wenn es ein abzählbares System $\mathfrak{K}$ kompakter Mengen gibt, so dass für jede kompakte Menge K und jede offene Menge G die K enthält ein $K_1 \in \mathfrak{K}$ mit $K \subset K_1 \subset G$ existiert.

Beweis: Man stellt leicht fest dass in diesem Fall, $K(X)$ mit $\mathfrak{K}$ auf $F_0(X)$ äquivalent ist, und somit folgt der Satz aus Satz 1.4.

SATZ 1.10. Ist $(X, \mathfrak{T})$ ein punktual kompakter T_1 — Raum[1], so genügt $(F_0(X), \tau^{K(X)})$ dann und nur dann dem 2. Abzählbarkeitsaxiom, wenn auch $(X, \mathfrak{T})$ diesem Axiom genügt.

Reweis: $(F_0(X), \tau^{K(X)})$ genüge dem 2. Abzählbarkeitsaxiom und $\mathfrak{K} \subset K(X)$ sei abzählbar und mit $K(X)$ auf $F_0(X)$ äquivalent. Es sei $\mathfrak{K} = \{K_1, K_2, \ldots,\}$. Mit G_i bezeichnen wir dass Innere der Menge K_i. Nun zeigen wir, dass $\mathfrak{B} = \{G_1, G_2, \ldots\}$ eine abzählbare Basis der Topologie $\mathfrak{T}$ ist. Es sei G offen und $x \in G$. Dann gibt es, da $(X, \mathfrak{T})$ punktual kompakt ist, eine kompakte Umgebung $V(x)$ von x mit $x \in V(x) \subset G$. Da $V(x)$ kompakt ist, gibt es ein $K_i \in \mathfrak{K}$ mit $V(x) \subset K_i \subset G$. Dann ist aber auch $x \in G_i \subset G$ und somit ist $\mathcal{B}$ eine Basis der Topologie $\mathcal{T}$.

Umgekehrt, genüge $(X, \mathfrak{T})$ dem 2. Abzählbarkeitsaxiom. Die Inneren der kompakten Umgebungen aller Punkte aus X sind dann auch eine Basis der Topologie $\mathfrak{T}$. Es gibt dann ein abzählbares System kompakter Umgebungen, so dass die Inneren der Mengen dieses Systems eine Basis von $\mathfrak{T}$ sind. Dieses System[2] ist aber dann mit $K(X)$ auf $F_0(X)$ äquivalent.

SATZ 2.11. Ist $(X, \mathfrak{T})$ ein lokal kompakter Hausdorff-Raum, so genügt $(F_0(X), \tau^{K(X)})$ dann und nur dann dem 2. Abzählbarkeitsaxiom, wenn $(X, \mathfrak{T})$ ein separabler metrisierbarer Raum ist.

Als letzten Sonderfall betrachten wir noch die Topologie $\tau^{E(X)}$.

SAZT 1.12. Ist $(X, \mathfrak{T})$ ein T_1-Raum, so genügt $(F_0(X), \tau^{E(X)}$ dann und nur dann dem 2. Abzählberkeitsaxiom wenn X abzählbar ist.

---

[1]) Ein Raum $(X, \mathcal{T})$ ist punktual kompakt, wenn jeder Punkt aus X ein Fnndamentalsystem kompakter Umgebungen besitzt.

[2]) Es kann gleich von Anfang an endlich vereinigungsabgenschlossen angenommen werden.

Wir wenden uns jetzt dem 1. Abzählbarkeitsaxiom zu. Zunächts betrachten wir wieder den allgemeinen Fall.

SATZ 1.13. Ist $\mathfrak{F}$ ein Teilsystem von $P_0(X)$, das alle einpunktigen Teilmengen von X enthält, so genügt $(\mathfrak{F}, \tau^{\gamma})$ dann und nur dann dem 1. Abzählbarkeitsaxiom, wenn für jede Menge M aus $\mathfrak{F}$ ein abzählbares Teilsystem γ_M von γ existiert, das folgenden zwei Bedingungen genügt: (1) Jede Menge aus τ_M hat mit M einem leeren Durchschnitt; (2) Jede Menge aus γ die M nicht schneidet ist in wenigstens einer Menge aus γ_M enthalten.

Wir gehen hier nicht auf einen Beweis ein, dieser folgt direkt aus der Definition der Topologie τ^{γ}.

Für die verschiedenen Sonderfälle erhalten wir:

SATZ 1. 14. Ist $(X, \mathfrak{T})$ ein T_1-Raum, so genügt $(F_0(X), \tau^{F(X)})$ dann und nur dann dem 1. Abzählbarkeitsaxiom, wenn $(X, \mathfrak{T})$ dem Axiom D_1 genügt.

Ein Raum $(X, \mathfrak{T})$ genügt dem Axiom D_1 von Aull [1] wenn jede nichtleere abgeschlossene Teilmenge von $(X, \mathfrak{T})$ eine abzählbare Umgebungsbasis offener Mengen besitzt.

Beweis: $(F_0(X), \tau^{F(X)})$ genüge dem 1. Abzählbarkeitsaxiom. Es sei F beliebig aus $F_0(X)$. Dann gibt es nach Satz 1.13. ein abzählbares System abgeschlossener Teilmengen, γ, so dass F mit jeder Menge aus γ einer leeren Durchschnitt besitzt und jede abgeschlossene Menge die F nicht schneidet ist in einer Menge aus τ enthalten. Dann folgt dass $\{X - A : A \in \gamma)\}$ eine abzählbare Umgebungsbasis offener Mengen der Menge F ist. $(X, \mathfrak{T})$ genügt also dem Axiom D_1.

$(X, \mathfrak{T})$ genüge dem Axiom D_1. Für $F \in F_0(X)$ gibt es dann eine abzählbare Umgebungsbasis offener Mengen, $\{G_1, G_2, \ldots,\}$. Dann erfüllt jedoch $\tau_F = \{X - G_1, X - G_2, \ldots\}$ die Bedingungen (1) und (2) des Satzes 1.13 und $(F_0(X), \tau^{F(X)})$ genügt somit dem ersten Abzählbarkeitsaxiom.

Jeder T_1-Raum, der dem Axiom D_1 genügt, ist ein perfekt normaler Raum. [1]. Aus diesem Grunde setzen wir im nächsten Satz gleich von Anfang an voraus dass der Raum $(X, \mathfrak{T})$ normal ist.

SATZ 1.15. Ist $(X, \mathfrak{T})$ ein normaler T_1-Raum, so genügt $(F_0(X), \tau^{F(X)})$ dann und nur dann dem 1. Abzählbarkeitsaxiom, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

(1) $(X, \mathfrak{T})$ ist ein perfekt normaler Raum,

(2) Die Menge S aller in $(X, \mathfrak{T})$ nichtisolierten Punkte ist abzählber kompakt,

(3) S besitzt in $(X, \mathfrak{T})$ eine abzählbare Umgebungsbasis offenar Mengen.

Beweis: Genügt $(F_0(X), \tau^{F(X)})$ dem 1. Abzählbarkeitsaxiom, so genügt nach Satz 1.14. der Raum $(X, \mathfrak{T})$ dem Axiom D_1. Dann folgt aus [1], *Corol-*

lary 4 und *Theorem 10*, dass $(X, \mathfrak{T})$ perfekt normal und die Menge S der nichtisolierten Punkte abzählbar kompakt ist. (3) folgt direkt aus D_1.

$(X, \mathfrak{T})$ erfülle nun die Bedingungen (1) — (3). Für den Rest des Beweises genügt es nun zu zeigen, dass aus diesen Bedingungen das Axiom D_1 folgt.

Zunächst zeigen wir, dass jede abgeschlossene Menge nichtisolierter Punkte eine abzählbare Umgebungsbasis in $(X, \mathfrak{T})$ besitzt.

Es sei $F \subset S$, F abgeschlossen. Da $(S, \mathfrak{T}_S)$ ($\mathfrak{T}_S$ die von $\mathfrak{T}$ auf S induzierte Topologie) perfekt normal und abzählbar kompakt ist folgt aus [1] *Theorem* 5, dass $(S, \mathfrak{T}_S)$ dem Axiom D_1 genügt. Es gibt somit abzählbar viele offene Mengen $G_1, G_2, \ldots$, die F enthalten und für jede offene Menge G die F enthält, gibt es ein i so dass $F \subset G_i \cap S \subset G$ ist. Da $(X, \mathfrak{T})$ perfekt normal ist, können wir gleich von Anfang an voraussetzen, dass $F = \bigcap_{i=1}^{\infty} \bar{G}_i$ und $G_{i+1} \subset G_i$, $i = 1, 2, \ldots$ ist.

Ist nun schon $\{G_1, G_2, \ldots\}$ eine Umgebungsbasis von F in $(X, \mathfrak{T})$ dann ist nichts mehr zu beweisen. Ist das nicht der Fall, so gibt es wenigstens eine offene Menge G_0 die F enthält, so dass für jedes i, $G_i \not\subset G_0$ ist.

Nach (3) besitzt S eine abzählbare Umgebungsbasis $\{H_1, H_2, \ldots\}$ in $(X, \mathfrak{T})$. Wir bezeichnen dann mir G_{ij} den Durchschnitt $G_i \cap H_j$ und zeigen dass $\{G_{ij}: i, j = 1, 2, \ldots\}$ eine abzählbare Umgebungsbasis der Menge F ist. Um dieses zu beweisen genügt es zu zeigen, dass es für die Menge G_0 nei i und ein j mit $G_{ij} \subset G_0$ gibt.

Da $G_i \not\subset G_0$ ist, folgt, dass von einem Rang i^* weiter $G_i - G_0 \subset X - S$ ist. Dann ist aber $G_i - G_0$ eine offene Menge, da sie nur isolierte Punkte aus $(X, \mathfrak{T})$ enthält. Daraus folgt aber, dass die in $(X, \mathfrak{T})$ gebildete Hülle $\overline{G_i - G_0}$ keine gemeinsamen Punkte mit G_0 hat. Wir zeigen nun dass es ein $i_0 \geqslant i^*$ mit $\overline{G_{i_0} - G_0} \cap S = \emptyset$ geben muss.

Wäre nämlich $\overline{G_i - G_0} \cap S \neq \emptyset$ für jedes $i \geqslant i^*$, so würde, da S abzählbar kompakt ist $\bigcap_{i=i^*}^{\infty} \overline{(G_i - G_0)} \cap S \neq \emptyset$ folgen, was aber einen Widerspruch bedeuten würde, da einerseits $\bigcap_{i=i^*}^{\infty} \overline{(G_i - G_0)} \cap S \subset X - G$ und andererseits $\bigcup_{i=i^*}^{\infty} \overline{(G_i - G_0)} \cap S \subset \bigcap_{i=1}^{\infty} \bar{G}_i \cap S = F$ wäre.

Es sei nun $i_0 \geqslant i^*$, so dass $\overline{G_{i_0} - G_0} \cap S = \emptyset$ ist. Dann ist $X - \overline{(G_{i_0} - G_0)}$ eine offene Menge die S enthält. Es gibt somit ein j mit $S \subset H_j \subset X - \overline{(G_{i_0} - G_0)}$. Dann ist aber $F \subset G_{i_0} \cap H_j = G_{i_0 j} \subset G$.

Es sei nun F eine beliebige, abgeschlossene nichtleere Teilmenge von X. Es sei $F' = F \cap S$. Dann besitzt F' nach dem oben bewiesenen eine abzählbare Umgebungsbasis $\{G_1, G_2, \ldots\}$ in $(X, \mathfrak{T})$. Dann ist aber $\{G_1 \cup (F \cap (X - S)), G_2 \cup (F \cap (X - S)), \ldots\}$ eine Umgebungsbasis von F in $(X, \mathfrak{T})$.

$(X, \mathfrak{T})$ genügt also dem Axiom D_1 und so folgt aus Satz 1.14, dass $(F_0(X) \tau^{F(X)})$ dem 1. Abzählbarkeitsaxiom genügt.

Aus Satz 1.15. leiten wir noch folgende Eigenschaft ab:

SATZ 1.16. Ist $(X, \mathfrak{T})$ ein perfekt normaler T_1 — Raum mit endlich vielen isolierten Punkten, so genügt $(F_0(X), \tau^{F(X)})$ dann und nur dann dem 1. Abzählbarkeitsaxiom, wenn $(X, \mathfrak{T})$ abzählbar kompakt ist.

Ist $(X, \mathfrak{T})$ ein T_1—Raum, so kann man aus Satz 1.13. ein allgemeines Kriterium für die Gültigkeit des 1. Abzählbarkeitsaxioms für den Raum $(F_0(X), \tau^{K(X)})$ ableiten. Der Raum $(X, \mathfrak{T})$ muss dabei stets abzählbar im Unendlichen sein. Im folgenden beschränken wir uns nur auf punktual kompakte Räume.

SATZ. 1.17. Ist $(X, \mathfrak{T})$ ein punktual kompakter T_1 — Raum, so genügt $(F_0(X), \tau^{K(X)})$ dann und nur dann dem 1. Abzählbarkeitsaxiom, wenn jede offene Menge G abzählbare Vereinigung kompakter Mengen ist, so dass jeder Punkt x aus G innerer Punkt einer dieser kompakten Mengen ist.

SATZ 1.18. Ist $(X, \mathfrak{T})$ ein lokal kompakter Hausdorff-Raum, so genügt $(F_0(X), \tau^{K(X)})$ dann und nur dann dem 1. Abzählbarkeitsaxiom, wenn $(X, \mathfrak{T})$ ein perfekt normaler, im Unendlichen abzählbarer Raum ist.

Beweis: Wenn $(F_0(X), \tau^{K(X)})$ dem ersten Abzählbarkeitsaxiom genügt, dann ist nach vorhergehendem Satz $(X, \mathfrak{T})$ ein im Unendlichen abzählbarer Raum. Ein solcher regulärer Raum ist ein Lindelöf-Raum und somit ein normaler Raum [4]. Da jede, offene Menge Vereinigung abzählbar vieler kompakter Mengen ist (also auch abzählbare Vereinigung abgeschlossener Mengen) folgt nun dass $(X, \mathfrak{T})$ ein perfekt normaler Raum ist.

$(X, \mathfrak{T})$ sei ein perfekt normaler, im Unendlichen abzählbarer, lokal kompakter Raum.

Es sei G eine echte offene Teilmenge aus $(X, \mathfrak{T})$. Dann ist G Vereiningung abzählbar vieler offener Mengen G_i, $i = 1, 2, \ldots$ so dass $\overline{G}_i \subset G$ ist. Nach Voraussetzung ist G auch Vereinigung abzählbar vieler kompakter Mengen $K_1, K_2, \ldots$ Dann kann man mit Hilfe der lokalen Kompaktheit offene Mengen $H_1, H_2, \ldots$ finden, so dass $\overline{H}_k$ kompakt ist und noch folgende Bedingungen erfüllt sind: $H_{k+1} \supset \overline{H}_k$, $\bigcup_{k=1}^{\infty} \overline{H}_k = G$. Nun stellt man gleich fest, dass dann $\{\langle \overline{H} \rangle_k : k = 1, 2, \ldots\}$ eine abzählbare Umgebungsbasis der Menge $F = X - G$ im Raum $(F_0(X)\ \tau^{K(X)})$ ist und dieser genügt somit dem 1. Abzählbarkeitsaxiom.

Für die Topologie $\tau^{E(X)}$ machen wir nur folgende Aussage:

SATZ 1.19. Ist $(X, \mathfrak{T})$ ein T_1-Raum, so genügt $(F_0(X), \tau^{E(X)})$ dann und nur dann dem 1. Abzählbarkeitsaxiom, wenn X abzählbar ist.

Zum Abschluss dieses Paragraphen zählen wir noch, ohne Beweis, einige Eigenschaften der Topologien τ^{γ} auf, die man auch in [2] für konkretere

Fälle finden kann, und die sich leicht auf die Topologien τ übertragen lassen.

SATZ 1.20. $(P_0(X), \tau^\gamma)$ und $(F_0(X), \tau^\gamma)$ sind stets kompakte und zusammenhängende Räume.

SATZ 1.21. $(P_0(X), \tau^\gamma)$ ist dann und nur dann ein T_0-Raum, wenn γ alle einpunktigen Teilmengen von X enthält. $(F_0(X), \tau^\gamma)$ ist dann und nur dann ein T_0-Raum, wenn es für jedes Paar (F, H) abgeschlossener Mengen aus $F_0(X)$ mit $F \subset H$ ein A aus γ mit $F \cap A = \emptyset$ und $H \cap A \neq \emptyset$ gibt. Diese Räume sind nur in einigen trivialen Fällen T_1-Räume.

SATZ 1.22. $(X, \mathcal{T})$ sei ein kompakter T_1-Raum und γ erfülle folgende Bedingung: Für $F \in F_0(X)$ und $x \notin F$ gibt es ein $A \in \gamma$ so dass $x \in A$ und $A \cap F = \emptyset$ ist. Dann besitzt jede stetige Abbildung von $(F_0(X), \tau^\gamma)$ in sich selbst einen Fixpunkt.

Wir bezeichnen mit **i** die Abblildung, die jedem Punkt x aux X die Menge $\{x\}$ aus $P_0(X)$ zuteilt. Wir haben dann

SATZ 1.23. Es sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum. Dann ist **i**: $(X, \mathcal{T}) \to (P_0(X), \tau^\gamma)$ dann und nur dann stetig wenn $\mathcal{T}^\gamma \subset \mathcal{T}$ ist. **i** ist dann und nur dann ein Homöomorphismus von $(X, \mathcal{T})$ auf den Raum aller einpunktigen Teilmengen von X, versehen mit der von τ^γ induzierten Topologie, wenn $\mathcal{T}^\gamma = \mathcal{T}$ ist.

Im letzten Satz kann $P_0(X)$ auch durch $(F_0(X), \tau^\gamma)$ ersetzt werden, nur muss man für diesen Fall das T_1-Axiom für $(X, \mathcal{T}^\gamma)$ verlangen.

2. *Die Topologien* τ_σ. Diese Topologien unterscheiden sich wesentlich von den Topologien τ^γ. Gewöhnlich wir für σ eine feste Topologie des Raumes X angenommen. In diesem Fall wird τ_σ unter dem Namen „lower semifinite topology" in der Literatur begegnet.

Da τ die Menge X enthählt ist es stets eine Subbasis für eine Topologie $\mathcal{T}_\sigma$ auf X. Ersetzt man σ durch σ_*, das aus allen endlichen Durchschnitten der Mengen aus σ besteht, so erhält man eine Basis der Topologie $\mathcal{T}_\sigma$. Im allgemeinen ist τ_σ nicht gleich mit mit τ_{σ_*}. Mit dieser Tatsache beschäftigt sich der erste Satz.

SATZ 2.1. Es sei $\mathcal{F}$ ein Teilsystem von $P_0(X)$, das alle endlichen Teilmengen von X enthält. Für σ_1 und σ_2 ist τ_{σ_1} adnn und nur dann gleich mit τ_{σ_2} auf $\mathcal{F}$ wenn σ_1 und σ_2 in folgendem Sinne äquivalent sind: Für jedes $S_1 \in \sigma_1$ und $x \in S_1$ gibt es ein $S_2 \in \sigma_2$ so dass $x \in S_2 \subset S_1$ ist und für jedes $S_2 \in \sigma_2$ und $x \in S_2$ gibt es ein $S_1 \in \sigma_1$ so dass $x \in S_1 \subset S_2$ ist.

Beweis: Es sei $\tau_{\sigma_1} = \tau_{\sigma_2}$ aud $\mathcal{F}$, $S_1 \in \sigma_1$ und $x \in S_1$. Dann folgt $\{x\} \in \rangle S_1 \langle$ und folglich gibt es $S_2^1, \ldots, S_2^n$ aus σ_2 mit $\{x\} \in \rangle S_2^1 \langle \cap \ldots \cap \cap \rangle S_2^n \langle \subset \rangle S_1 \langle$. Da $\mathcal{F}$ alle endlichen Mengen enthält, muss es dann ein i,

$1 \leqslant i \leqslant n$ mit $x \in S_2^i \subset S_1$ geben und somit ist der erste Teil der Bedingung erfüllt. Der zweite folgt analog.

Es sei nun die Bedingung des Satzes erfüllt. Für $S_1 \in \sigma_1$ und $M \in \rangle S_1 \langle$, $M \in \mathfrak{F}$ gibt es dann ein $x \in M \cap S_1$ und folglich ein $S_2 \in \sigma_2$ so dass $x \in S_2 \subset S_1$ ist. Dann folgt aber $M \in \rangle S_2 \langle \subset \rangle S_1 \langle$ und folglich $\tau_{\sigma_1} \subset \tau_{\sigma_2}$. Genau zeigtman auch $\tau_{\sigma_2} \subset \tau_{\sigma_1}$ und folglich ist $\tau_{\sigma_1} = \tau_{\sigma_2}$.

Aus diesem Satz folgt nun gleich, dass τ_σ dann und nur dann auf $\mathfrak{F}$ mit τ_{σ_*} gleich ist, wenn σ sogar einer Basis der Topologie $\mathfrak{T}_\sigma$ ist. Ist σ eine Basis der Topologie $\mathfrak{T}_\sigma$ so folgt dass auf $\mathfrak{F}$ $\tau_\sigma = \tau_{\mathfrak{T}_\sigma}$ gilt.

Die folgenden zwei Sätze, die sich mit dem 2. und 1. Abzählbarkeitsaxiom beschäftigen, sprechen wir nur für $P_0(X)$ aus. In ihnen kann $P_0(X)$ mit $F_{0\sigma}(X)$ (Menge aller abgeschlossenen nichtleeren Teilmengen aus $(X, \mathfrak{T}_\sigma)$) ersetzt werden. Für diesen Fall verlangen wir jedoch, dass $(X, \mathcal{T}_\sigma)$ dem T_1—Axiom genügt.

SATZ 2.2. *Genügt $(P_0(X), \tau_\sigma)$ dem zweiten Abzählbarkeitsaxiom, so genügt auch $(X, \mathfrak{T}_\sigma)$ diesem Axiom. Ist σ eine Basis der Topologie $\mathfrak{T}_\sigma$, so genügt $(P_0(X), \tau_\sigma)$ dann und nur dann dem 2. Abzählbarkeitsaxiom, wenn auch $(X, \mathfrak{T}_\sigma)$ diesem Axiom genügt.*

Beweis: $(P_0(X), \tau_\sigma)$ genüge dem 2. Abzählbarkeitsaxiom. Dann gibt es ein abzählbares Teilsystem σ' von σ so dass alle endlichen Durchschnitts der Form $\rangle S_1 \langle \cap \ldots \cap \rangle S_n \langle$ mit $S_i \in \sigma'$, $i = 1, \ldots, n$ eine abzählbare Basis der Topologie σ_σ darstellen. Wir zeigen nun, dass σ'_* eine abzählbare Basis der Topologie $\mathfrak{T}_\sigma$ ist.

Es sei G aus $\mathfrak{T}_\sigma$ und $x \in G$. Dann gibt es $S_1, \ldots, S_n$ aus σ so dass $x \in S_1 \cap \ldots \cap S_n \subset G$ ist. Für jedes $i = 1, \ldots, n$ gibt es dann $S_1^i, \ldots, S_{n(i)}^i$ aus σ', so dass $\{x\} \in \rangle S_1^i \langle \cap \ldots \cap \rangle S_{n(i)}^i \langle \subset \rangle S_i \langle$ ist. Daraus folgt $x \in S_1^i \cap \ldots \cap S_{n(i)}^i \subset S_i$ und dann ist $x \in \bigcap_{i=1}^{n} \bigcap_{j=1}^{n(i)} S_j^i \subset S_i \cdot \sigma'_*$ ist also eine Basis der Topologie $\mathfrak{T}_\sigma$.

Es sei diesmal σ eine Basis der Topologie $\mathfrak{T}_\sigma$. Wenn nun $(X, \mathfrak{T}_\sigma)$ dem 2. Abzählbarkeitsaxiom genügt, so gibt es ein abzählbares Teilsystem σ' von σ, so dass σ' eine Basis der Topologie $\mathfrak{T}_\sigma$ ist. Es ist dann aber $\tau_\sigma = \tau_\sigma$, und somit besitzt auch $(P_0(X), \tau_\sigma)$ eine abzählbare Basis.

SATZ 2.3. *Genügt $(P_0(X), \tau_\sigma)$ dem 1. Abzählbarkeitsaxiom, so genügt auch $(X, \mathfrak{T}_\sigma)$ diesem Axiom. Ist σ eine Basis der Topologie $\mathfrak{T}_\sigma$, so genügt $(P_0(X), \tau_\sigma)$ dann und nur dann dem 1. Abzählbarkeitsaxiom, wenn $(X, \mathfrak{T}_\sigma)$ diesem Axiom genügt und wenn $(X, \mathfrak{T}_\sigma)$ hereditär separabel ist.*

Beweis: $(P_0(X), \tau_\sigma)$ genüge dem 1. Abzählbarkeitsaxiom. Für $x \in X$ gibt es dann abzählbar viele Durchschnitte $\rangle S_1^i \langle \cap \ldots \cap \langle S_{n(i)}^i \rangle$, $i = 1, 2, \ldots$ mit $S_j^i \in \sigma$, die eine Umgebungsbasis der Menge $\{x\}$ in $(P_0(X), \tau_\sigma)$ bilden. Wir bezeichnen mit $\sigma^x = \{S_j^i : i = 1, 2, \ldots ; j = 1, \ldots, n(i)\}$ und zeigen, dass σ_*^x eine Umgebungsbasis von x in $(X, \mathfrak{T}_\sigma)$ ist.

Es sei G offen in $(X, \mathfrak{T}_\sigma)$ und $x \in G$. Es gibt dann $S_1, \ldots, S_n$ aus σ so dass $x \in S_1 \cap \ldots \cap S_n \subset G$ ist. Für jedes $k = 1, \ldots, n$ gibt es ein i_k so dass $\{x\} \in \rangle S_1^{i_k} \langle \cap \ldots \cap \rangle S_{n(i_k)}^{i_k} \langle \subset \rangle S_i \langle$ ist. Dann folgt aber $x \in S_1^{i_k} \cap \ldots \cap$ $\cap S_{n(i_k)}^{i_k} \subset S_k$ und es ist dann $x \in \bigcap_{k=1}^{n} \bigcap_{j=1}^{n(i_k)} S_j^{i_k} \subset G$.

Es sei nun σ eine Basis der Topologie $\mathfrak{T}_\sigma$. Ist M eine beliebige nichtleere Teilmenge von X, so gibt es wiederum abzählbar viele $\rangle S_1^i \langle \cap \ldots \cap \rangle S_{n(i)}^i \langle$ $i = 1, 2, \ldots$ die eine Umgebungsbasis der Menge M in $(P_0(X), \tau_\sigma)$ bilden. Es sei x_{ij} ein beliebiges Element aus $M \cap S_j^i$ für $i = 1, 2, \ldots; j = 1, \ldots, n(i)$ und $L = \{x_{ij}: i = 1, 2, \ldots; j = 1, \ldots, n(i)\}$. Wir zeigen dass L dicht in M ist.

Es sei G eine offene Menge mit $M \cap G \neq \emptyset$. Dann ist $M \in \rangle G \langle$ und $\rangle G \langle$ ist offen in $(P_0(X), \tau_\sigma)$. Es gibt dann ein i, so dass $M \in \rangle S_1^i \langle \cap \ldots \cap$ $\cap \rangle S_{n(i)}^i \langle \subset \rangle G \langle$ ist. Dann gibt es wenigstens einen Index j, $1 \leqslant j \leqslant n(i)$, mit $S_j^i \subset G$. Dann folgt aber $G \cap L \neq \emptyset$. L ist also dicht in M.

$(X, \mathfrak{T}_\sigma)$ sei nun hereditär separabel und genüge dem 1. Abzählbarkeitsaxiom. Wenn M aus $P_0(X)$ ist, so sei $L = \{x_1, x_2, \ldots\}$ eine abzählbare in M dichte Teilmenge von M. Es sei $\mathfrak{V}_i = \{S_1^i, S_2^i, \ldots\}$ je eine abzählbare Umgebungsbasis der Punkte x_i. Wir zeigen nun dass $\{\rangle S \langle: S \in \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathfrak{V}_i\}$ eine abzählbare Umgebungsbasis der Menge M im Raum $(P_0(X), \tau_\sigma)$ darstellt.

Es sei S aus σ so dass $M \cap S \neq \emptyset$ ist. Dann gibt es ein $x \in L$ und ein S_j^i aus $\mathfrak{V}_i$ so dass $x_i \in M \cap S$ und $S_j^i \subset S$ ist. Dann ist aber auch $M \in > S_j^i \langle \subset > S <$ und somit ist der Satz bewiesen.

Die nächsten Sätze befassen sich mir Kompaktheitsfragen.

SATZ 2.4. $(P_0(X), \tau_\sigma)$ ist dann und nur dann kompakt, wenn auch $(X, \mathfrak{T}_\sigma)$ kompakt ist.

Auch in diesem Satz kann $P_0(X)$ durch $F_0(X)$ ersetzt werden, wir verlangen jedoch dann dass $(X, \mathfrak{T}_\sigma)$ dem T_1 — Axiom genügt.

Beweis. Es sei $(P_0(X), \tau_\sigma)$ kompakt und $\{S_\alpha: \alpha \in \Omega\}$ eine Überdeckung von X mit Elementen der Subbasis σ. Dann ist $\{\rangle S_\alpha \langle: \alpha \in \Omega\}$ eine offene Überdeckung des Raumes $P_0(X)$. Es gibt dann endlich viele Indizes $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ so das schon $\{\rangle S_{\alpha_1} \langle, \ldots, \rangle S_{\alpha_n} \langle\}$ eine Überdeckung von $P_0(X)$ ist. Es folgt dann $\bigcup_{i=1}^{n} S_{\alpha_i} = X$ und folglich ist $(X, \mathfrak{T}_\sigma)$ nach dem Alexander' schen Satz [3] V. 6) ein kompakter Raum.

Umgekehrt schliesst man ähnlich, dass die Kompaktheit von $(X, \mathfrak{T}_\sigma)$ jene von $(P_0(X), \tau_\sigma)$ hinter sich zieht.

SATZ 2.5. $(P_0(X), \tau_\sigma)$ ist dann und nur dann ein Lindelöf-Raum, wenn auch $(X, \mathfrak{T}_\sigma)$ ein Lindelöf-Raum sit.

Beweis: Dieser Satz folgt gleich aus der Bemerkung, dass $\{S_1^\alpha \cap$ $\cap \ldots \cap S_{n(\alpha)}^\alpha : \alpha \in \Omega\}$ dann und nur dann eine Überdeckung des Raumes X ist, ween $\{\rangle S_1^\alpha \langle \cap \ldots \cap \rangle S_{n(\alpha)}^\alpha \langle: \alpha \in \Omega\}$ eine Überdeckung des Raumes $P_0(X)$ ist.

Auch hier erwähnen wir zum Abschluss einige Eigenschaften der Topologien τ_σ, die teilweise schon bekannt sind oder sich aus bekannten ähnlichen Sätzen leicht ableiten lassen (siehe z. B. [2].)

SATZ 2.6. $(P_0(X), \tau_\sigma)$ ist dann und nur dann ein T_0-Raum, wenn σ alle einpunktigen Teilmengen von X enthält. Ist $(X, \mathfrak{T})$ ein T_1-Raum, so ist $(F_0,(X)\ \tau_\sigma)$ dann und nur dann ein T_0-Raum, wenn es für jedes Paar (F, H) in $(X, \mathfrak{T})$ abgeschlossener Mengen mit $F \subsetneq H$ ein $S \in \sigma$ mit $S \cap F = \emptyset$ und $S \cap H \neq \emptyset$ gibt.

Ist also σ eine Basis der Topologie $\mathfrak{T}_\sigma$, so ist $(P_0(X), \tau_\sigma)$ dann und nur dann ein T_0-Raum, wenn $(X, \mathfrak{T}_\sigma)$ diskret ist. Die Topologie ist, ausser einigen trivialen Fällen, keine T_1—Topologie.

SATZ 3.7. Es sei $(X, \mathfrak{T})$ ein kompakter T_1-Raum. Ist $(F_0(X), \tau_\sigma)$ ein T_0-Raum, so besitzt jede stetige Abbildung von $(F_0(X), \tau_\sigma)$ in sich selbst einen Fixpunkt.

SATZ 3.8. Es sei $(X, \mathfrak{T})$ ein topologischer Raum. Die Abbildungi ist dann und nur dann eine stetige Abbildung des Raumes $(X, \mathfrak{T})$ in den Raum $(P_0(X), \tau_\sigma)$ wenn $\sigma \subset \mathfrak{T}$ ist. i bildet dann und nur dann den Raum $(X, \mathfrak{T})$ homöomorph auf den Raum aller einpunktigen Teilmengen von X mit der von τ_σ induzierten Topologie, ab, wenn $\mathfrak{T}_\sigma = \mathfrak{T}$ ist.

3. *Die Topologien* τ_σ^γ. Mit τ_σ^γ bezeichnen wir das Supremum im Verband aller Topologien auf $P_0(X)$ der Topologie τ^γ und der Topologie τ_σ. Diese Topologien besitzen, besonders was Trennungseigenschaften anbelangt, viel bessere Eigenschaften als die Topologien τ^γ und τ_σ. Unter ihnen ist besonders wichtig die sogenannte Vietoris—Topologie, für die $\gamma = F(X)$ und $\sigma = \mathfrak{T}$ angenommen wird.

Aus der Vielfalt der Eigenschaften der Topologien τ_σ^γ greifen wir nur einige heraus, die unmittelbar an die, in den ersten Teilen besprochenen Eigenschaften anschliessen. Wir beginnen mit einigen allgemeinen Betrachtungen.

SATZ 3.1. Es sei $\mathfrak{F}$ ein Teilsystem von $P_0(X)$, das alle einpunktigen Teilmengen von X enthält und σ eine beliebige Subbasis. Unter diesen Bedingungen ist auf $\mathfrak{F}$ dann und nur dann $\tau_\sigma^{\gamma_1} = \tau_\sigma^{\gamma_2}$ wenn γ_1 und γ_2 auf $\mathfrak{F}$ äquivalent sind.

Beweis: Es sei $\sigma^{\gamma_1} = \sigma^{\gamma_2}$ auf $\mathfrak{F}$, und $A \in \gamma_1$. Ist M aus $\mathfrak{F}$ und $M \cap A = \emptyset$, dann gibt es $B \in \gamma_2$, $S_1, \ldots, S_n \in \sigma$ so dass $M \in \langle B \rangle \cap \rangle S_1 \langle \cap \cdots \cap \cap \rangle S_n \langle \subset \rangle A \langle$ ist. Daraus folgt jedoch $M \in \langle B \rangle \subset \rangle A \rangle$. Wenn $B \in \gamma_2$ ist und $M \cap B = \emptyset$ für ein $M \in \mathfrak{F}$, dann folgt genau so, dass es ein $A \in \gamma_1$ mit $M \in \langle A \rangle \subset \langle B \rangle$ gibt und folglich sind γ_1 und γ_2 auf $\mathfrak{F}$ äquivalent.

Ist γ_1 mit γ_2 auf $\mathfrak{F}$ äquivalent, dann folgt aus Satz 1.1., dass dann $\tau_\sigma^{\gamma_1} = \tau_\sigma^{\gamma_2}$ auf $\mathfrak{F}$ ist.

Für $P_0(X)$ erhält man aus diesem Satz

SATZ 3.2. Ist σ eine Basis der Topologie $\mathfrak{T}_\sigma$, so ist auf $P_0(X)$ dann und nur dann $\tau_\sigma^\gamma = \tau_{\mathfrak{T}_\sigma}^{F\gamma(X)}$ wenn, $\gamma = F\gamma(X)$ ist.

Es sei $(X, \mathfrak{T})$ ein topologischer T_1-Raum, $\mathfrak{B}$ eine Basis der Topologie $\mathfrak{T}$. Wir bezeichnen mit $\gamma = \{X - G, G \in \mathfrak{B}\}$ Dann folgt aus Satz. 3.1.

SATZ 3.3. Auf $F_0(X)$ ist dann und nur dann $\tau_{\mathfrak{B}}^\gamma = \tau_{\mathfrak{T}}^{F(X)}$ wenn γ mit $F(X)$ auf $F_0(X)$ äquivalent ist.

Satz 3.3 verallgemeinert einen Satz von *Kusnezov* [5] *Lemma* 1.

Wir wenden uns jetzt wieder den Abzählbarkeitsaxiomen zu.

SATZ 3.4. Es sei σ eine Basis der Topologie $\mathfrak{T}_\sigma$. $(P_0(X), \tau_\sigma^\gamma)$ genügt dann und nur dann dem 2. Abzählbarkeirtsaxiom, wenn $(P_0(X), \tau_\sigma)$ und $(P_0(X), \tau^\gamma)$ diesem Axiom genügen.

Beweis: $(P_0(X), \tau_\sigma^\gamma)$ genüge dem 2. Abzählbarkeitsaxiom. Dann gibt es eine Basis der Form $\{\langle A_i\rangle \cap \rangle S_1^i\langle \cap \ldots \cap \rangle S_{n(i)}^i\langle, A_i \in \gamma, S_j^i \in \sigma, i = 1, 2, \ldots; j = 1, \ldots, n(i)\}$ der Topologie τ_σ^γ.

Es sei nun A beliebig aus γ und $M \in \langle A\rangle$. Dann gibt es einen Index i so dass $M \in \langle A_i\rangle \cap \rangle S_1^i\langle \cap \ldots \cap \rangle S_{n(i)}^i\langle \subset \langle A\rangle$ ist. Daraus folgt $M \in \langle A_i\rangle \subset \subset \langle A\rangle$ und folglich ist $\{\langle A_i\rangle\ i = 1, 2, \ldots\}$ eine abzählbare Basis der Topologie τ auf $P_0(X)$.

Um das 2. Abzählbarheitsaxiom für τ_σ auf $P_0(X)$ nachzuweisen, genügt es nach Satz. 2.2. zu zeigen, dass $(X, \mathfrak{T}_\sigma)$ diesem Axiom genügt.

Es sei S eine von X verschiedene Menge aus σ. Dann ist $X \in \rangle S\langle$ und somit gibt es einen Index i für welchen $X \in \langle A_i\rangle \cap \rangle S_1^i\langle \cap \ldots \cap \rangle S_{n(i)}^i\langle \subset \rangle S\langle$ gilt. Hier muss offensichtlich $A_i = \emptyset$ sein. Wir können somit gleich $\rangle S_1^i\langle \cap \cap \ldots \cap \rangle S_{n(i)}^i\langle \subset \rangle S\langle$ schreiben. Dann gibt es aber einen Index j, $1 \leqslant j \leqslant n(i)$ so dass S_j^i in S enthalten ist.

Mit σ' bezeichnen wir nun folgendes abzählbares Teilsystem von σ: $\sigma' = \bigcup_{i=1}^{\infty} \{S_1^i \ldots, S_{n(i)}^i\}$. Wir zeigen dann dass S Vereiningung von Mengen aus σ' ist.

Wir setzen das Gegenteil voraus, dass $S - \bigcup_{\substack{S' \subset S \\ S' \in \sigma'}} S' \neq \emptyset$ ist. Dann gehört $X - \bigcup_{\substack{S' \subset S \\ S' \in \sigma'}} S' = T$ der Menge $\rangle S\langle$ an. Es gibt somit wenigstens einen Index i so dass $T \in \langle A_i\rangle \cap \rangle S_i^i\langle \cap \ldots \cap \rangle S_{n(i)}^i\langle \subset \rangle S\langle$ ist.

Wir behandeln hier nun drei Fälle.

1° $A_i = \emptyset$. Dann ist $\rangle S_1^i\langle \cap \ldots \cap \rangle S_{n(i)}^i\langle \subset \rangle S\langle$, woraus aber die Existenz eines S_j^i, $1 \leqslant j \leqslant n(i)$ mit $T \cap S_j^i \neq \emptyset$ und $S_j^i \subset S$ folgt. Da winderspricht aber der Definition von T.

2° $S_j^i = X$ für $j = 1, \ldots, n(i)$. Dann folgt $T \in \langle A_i\rangle \subset \rangle S\langle$ und somit $T \subset X - A_i \subset S$ also $S \supset X - T \supset A_i \supset X - S$. Das ist aber nur dann möglich, wenn $S = X$ ist, was aber wiederum unseren Voraussetzungen widerspricht.

3° Es bleibt folglich noch der Fall $A_i \neq \emptyset$ und wenigstens ein S_j^i, $1 \leqslant j \leqslant n(i)$ ist verschieden von X, zu behandeln.

Aus $T \in \langle A_i \rangle \cap \rangle S_1^i \langle \cap \ldots \cap \rangle S_{n(i)}^i \langle$ folgt dann $T \subset X - A_i$ also $A_i \subset \subset X - T \subset S$. Nun muss aber auch $(X - A_i) \cap (X - S) = \emptyset$ sein. Falls es ein $x \in (X - A_i) \cap (X - S)$ gibt muss für wenigstens einen Index j, $1 \leqslant \leqslant j \leqslant n(i)$, $S_j^i \subset S$ folgen, was aber der Definition von T widerspricht.

Aus $(X - A_i) \cap (X - S) = \emptyset$ folgt nun weiter $A_i \cup S = X$, also $S = X$ und folglich auch im dritten Fall ein Widerspruch.

S ist somit Vereinigung von Mengen aus σ'. Dann ist aber σ' eine abzählbare Basis der Topologie $\mathcal{T}_\sigma$.

Der Rest des Beweises foltg direkt aus der Definition der Topologie τ_σ^γ.

Genau so beweist man auch folgenden Satz'

SATZ 3.5. Ist $(X, \mathcal{T})$ ein T_1-Raum, so genügt $(F_0(X), \tau_{\mathcal{T}}^\gamma$ dann und nur dann dem 2. Abzählbarkeitsaxiom, wenn $(X, \mathcal{T})$ und $(F_0(X), \tau_\gamma)$ diesem Axiom genügen.

Aus dem letzten Satz erhalten wir weiter folgende:

SATZ 3.6. Ist $(X, \mathcal{T})$ ein T_1-Raum, so genügt $(F_0(X), \tau^{F(X)})$ dann und nur dann dem zweiten Abzählbarkeitsaxiom, wenn $(X, \mathcal{T})$ dem Axiom D_2 genügt.

Beweis : Satz 1.6. und 3.5.

SATZ 3.7. Ist $(X, \mathcal{T})$ ein kompakter T_1-Raum, so genügt $(F_0(X), \tau_{\mathcal{T}}^{F(X)})$ dann und nur dann dem 2. Abzählbarkeitsaxiom, wenn auch $(X, \mathcal{T})$ diesem Axiom genügt.

Dieser Satz ist bereits bei *E. Michael* [7] zu finden. Dort wird jedoch vorausgesetzt, dass $(X, \mathcal{T})$ ein Hausdorff-Raum ist. Ist dieses der Fall, dann ist die Gültigkeit des 2. Abzählbarkeitsaxiomes für den Raum $(F_0(X), \tau_{\mathcal{T}}^{F(X)})$ gleichwertig mit der kompakten Metrisierbarkeit des Raumes $(X, \mathcal{T})$ (siehe Satz 1.8.)

SATZ 3.8. Ist $(X, \mathcal{T})$ ein punktual kompakter Raum, so genügt $(F_0(X), \tau_{\mathcal{T}}^{K(X)})$ dann und nur dann dem 2. Abzählbarkeitsaxiom, wenn auch $(X, \mathcal{T})$ diesem Axiom genügt.

SATZ 3.9. Ist $(X, \mathcal{T})$ ein lokal kompakter Hausdorff-Raum, so genügt $(F_0(X), \tau_{\mathcal{T}}^{K(X)})$dann und nur dann dem 2. Abzählbarkeitsaxiom, wenn $(X, \mathcal{T})$ ein separabler metrisierbarer Raum ist.

Wir betrachten jetzt das 1. Abzählbarkeitsaxiom:

SATZ 3.10. Es sei σ eine Basis der Topologie $\mathcal{T}_\sigma$ und γ sei so, dass $\mathcal{T}^\gamma \subset \mathcal{T}_\sigma$ gilt. $(P_0(X), \tau_\sigma^\gamma)$ genügt unter diesen Bedingungen, dann und nur dann dem 1. Abzählbarkeitsaxiom, wenn $(P_0(X), \tau^\gamma)$ und $(P_0(X), \tau_\sigma)$ diesem Axiom genügen.

Beweis: $(P_0(X), \tau_\sigma^\gamma)$ genüge dem 1. Abzählbarkeitsaxiom. Es sei M beliebig aus $P_0(X)$. M besitzt dann eine abzählbare Umgebungsbasis der Form $\{\langle A_i \rangle \cap \rangle S_1^i \langle \cap \ldots \cap \rangle S_{n(i)}^i \langle, A_i \in \gamma\, S_j^i \in \sigma : i = 1, 2, \ldots j = 1, \ldots, n(i)\}$. Dann folgt wie in Satz 3.4. dass $\{\langle A_i \rangle : i = 1, 2, \ldots\}$ eine Umgebungsbasis von M in $(P_0(X), \tau^\gamma)$ ist.

Wählt man x_{ij} aus $(X - A_i) \cap S_j^i \cap M$, $i = 1, 2, \ldots, ; j = 1, \ldots, n(i)$, so stellt man leich tfest, dass in $(X, \mathcal{T}_\sigma)$ diese Punkte {eine in M dichte Menge bilden.

Ist $x \in X$ und ist $\{\langle A_i \rangle \cap \rangle S_1^i \langle \cap \ldots \cap \rangle S_{n(i)}^i \langle : i = 1, \ldots,\}$ eine abzählbare Umgebungsbasis der Menge $\{x\}$ in $(P_0(X), \tau_\sigma^\gamma)$ so stellt man nun leicht fest, dass dann $\{(X - A_i) \cap S_1^i \cap \ldots \cap S_{n(i)}^i : i = 1, 2, \ldots\}$ eine Umgebungsbasis von x in $(X, \mathcal{T}_\sigma)$ ist.

Der Rest des Beweises folgt einfach aus der Definition der Topologie

Genau so beweist man auch den folgenden Satz

SATZ 3.10. Ist $(X, \mathcal{T})$ ein T_1-Raum, und ist γ ein System in $(X, \mathcal{T})$ abgeschlossener Mengen, so genügt $(F_0(X), \tau_{\mathcal{T}}^\gamma)$ dann und nur dann dem 1. Abzählbarkeitsaxiom, wenn $(F_0(X), \tau^\gamma)$ und $(F_0(X), \tau_{\mathcal{T}})$ diesem Axiom genügen.

Aus dem letzten Satz und aus 1.15, 1.18, und 2.3. erhalten wir nun folgende Kriterien für die Gültigkeit des 1. Abzählbarkeitsaxioms:

SATZ 3.11. Ist $(X, \mathcal{T})$ ein normaler T_1-Raum, so genügt $(F_0(X), \tau_{\mathcal{T}}^{F(X)})$ dann und nur dann dem 1. Abzählbarkeitsaxiom, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind.

(1) $(X, \mathcal{T})$ ist perfekt normal.

(2) Die Menge der isolierten Punkte aus $(X, \mathcal{T})$ ist abzählbar.

(3) Die Menge S der in $(X, \mathcal{T})$ nichtisolierten Punkte ist abzählbar kompakt, hereditär separabel in der von $\mathcal{T}$ auf S induzierten Topologie und S besitzt in $(X, \mathcal{T})$ eine abzählbare Umgebungsbasis.

Dieser Satz wurde bereits von *M. M. Tschoban* [*10*] *Satz 8* ausgesprochen. Er ist in der erwähnten Arbeit ohne Beweis anzufinden.

SATZ 3.12. Ist $(X, \mathcal{T})$ ein lokal kompakter Hausdorff Raum, so genügt $(F_0(X), \tau_{\mathcal{T}}^{K(X)})$ dann und nur dann dem ersten Abzählbarkeitsaxiom, wenn $(X, \mathcal{T})$ ein perfekt normaler, im Unendlichen abzählbarer, hereditär separabler Raum ist der dem. 1. Abzählbarkeitsaxiom genügt.

Wir beschäftigen uns nun mit der Kompaktheit der Topologie τ_σ^γ.

SATZ 3.14. $(P_0(X), \tau_\sigma^\gamma)$ ist dann und nur dann kompakt, wenn, $(X, \mathcal{T}_\sigma)$ kompakt ist und wenn jede Menge aus γ in $(X, \mathcal{T})$ kompakt ist.

Beweis: Es sei $(P_0(X), \tau_\sigma^\gamma)$ ein kompakter Raum. Dann ist auch der Raum $(P_0(X), \tau)$ kompakt und dann folgt aus Satz 2.4. dass auch $(X, \mathcal{T}_\sigma)$ kompakt sein muss. Ist nun A eine Menge aus γ und ist $\{S_\alpha : \alpha \in \Omega\}$ mit $S_\alpha \in \sigma$ eine Überdekkung der Menge A, dann ist $\{\langle A \rangle, \rangle S_\alpha \langle : \alpha \in \Omega\}$ eine offene Überdeckung von $P_0(X)$. Diese enthält dann eine endliche Überdeckung $\{\langle A \rangle, \rangle S_{\alpha_1} \langle, \ldots, \rangle S_{\alpha_n} \langle\}$ von $P_0(X)$ und dann folgt dass die Mengen $S_{\alpha_1}, \ldots, S_{\alpha_n}$ ebenfalls A überdecken. Nach dem Alexander' schen Satz ist dann A in $(X, \mathcal{T}_\sigma)$ kompakt.

Es sei $(X, \mathcal{T}_\sigma)$ ein kompakter Raum und jede Menge $A \in \gamma$ kompakt in $(X, \mathcal{T}_\sigma)$. Es sei $\{\langle A_\alpha\rangle, \rangle S_\beta\langle : \alpha \in \Omega, \beta \in \Lambda\}$ eine Überdeckung der Menge $P_0(X)$ mit Elementen der Subbasis der Topologie τ_σ^γ. Es können nun zwei Fälle auftreten:

1° $\bigcup_{\beta \in \Lambda} S_\beta = X$. Dann ist bereits $\{\rangle S_\beta\langle : \beta \in \Lambda\}$ eine Überdeckung der Menge $P_0(X)$, und aus der Kompaktheit des Raumes $(X, \mathcal{T}_\sigma)$ folgt dann dass diese Überdeckung eine endliche Überdeckung von $P_0(X)$ enthält.

2° $\bigcup_{\beta \in \Lambda} S_\beta \neq X$. Es sei dann $M = X - \bigcup_{\beta \in \Lambda} S_\beta$. Es gibt dann ein $\alpha_0 \in \Omega$ so dass $M \in \langle A_{\alpha_0}\rangle$ ist. Dann überdecken jedoch die Mengen S_β die Menge A_{α_0} und dann gibt es schon endlich viele S_β die A_{α_0} überdecken. Überdecken, z. B. $S_{\alpha_1}, \ldots, S_{\alpha_n}$ die Menge A_{α_0} dann ist $\{\langle A_{\alpha_0}\rangle, \rangle S_{\beta_1}\langle, \ldots, \rangle S_{\beta_n}\langle\}$ eine Überdeckung von $P_0(X)$.

Es folgt somit, dass $(P_0(X), \tau_\sigma^\gamma)$ kompakt ist.

Völlig analog beweist man auch folgenden Satz

SATZ 3.14. Ist $(X, \mathcal{T})$ ein T_1-Raum, τ eine Subbasis der Topologie $\mathcal{T}_\sigma$, so ist $(F_0(X), \tau_\sigma^\gamma)$ dann und nur dann kompakt, wenn $(X, \mathcal{T}_\sigma)$ kompakt ist und wenn jede Menge aus γ kompakt in $(X, \mathcal{T}_\sigma)$ ist.

Für die Vietoris — Topologie erhält man hier dann folgenden, bekannten Satz:

SATZ 3.15. Ist $(X, \mathcal{T})$ ein T_1-Raum, so ist $(F_0(X), \tau_{\mathcal{T}}^{F(X)})$ dann und nur dann kompakt, wenn auch $(X, \mathcal{T})$ kompakt ist. Auch der nächste Satz folgt gleich aus Satz 3.14.

SATZ 3.16. Ist $(X, \mathcal{T})$ ein T_1-Raum, so ist $(F_0(X), \tau_{\mathcal{T}}^{K(X)})$ dann und nur dann kompakt, wenn $(X, \mathcal{T})$ kompakt ist.

Zum Abschluss zählen wir auch hier einige Ergebnisse auf, die teilweise schon für konkretere Topologien τ_σ^γ bewiesen wurden und sich ganz leicht auf den allgemeinen Fall übertragen lassen.

SATZ 3.17. $(P_0(X), \tau_\sigma^\gamma)$ ist dann und nur dann ein T_0-Raum, wenn einer der Räume $(P_0(X), \tau^\gamma)$ oder $(P_0(X), \tau_\sigma)$ ein T_0-Raum ist

SATZ 3.18. Auf $P_0(X)$ sind folgende Eigenschaften äquivalent:

(1) $(P_0(X), \tau_\sigma^\gamma)$ ist ein T_1-Raum.

(2) $(P_0(X), \tau_\sigma^\gamma)$ ist ein Hausdorff-Raum.

(3) $(P_0(X), \tau_\sigma^\gamma)$ ist ein regulärer T_1-Raum.

(4) γ und σ enthalten alle einpunktigen Teilmengen von X.

SATZ 3.19. Ist $(X, \mathcal{T})$ ein T_1-Raum, so ist $(F_0(X), \tau_\sigma^\gamma)$ dann und nur dann ein T_0-Raum, wenn einer der Räume $(F_0(X), \tau^\gamma)$ oder $(F_0(X), \tau_\sigma)$ ein T_0-Raum ist. $(F_0(X), \tau_\sigma^\gamma)$ ist dann und nur dann ein T_1-Raum, wenn beide Räume, $(F_0(X), \tau^\gamma)$ und $(F_0(X), \tau_\sigma)$ T_0-Räume sind.

Für das Hausdorff'sche Axiom erhalten wir eine Verallgemeinerung eines Satzes von *H. Poppe* [8] *Satz* 3.

SATZ 3.20 Ist $(X, \mathcal{T})$ ein T_1-Raum, so ist $(F_0(X), \tau_\sigma^\gamma)$ dann und nur dann ein Hausdorff-Raum, wenn es für jedes $x \in X$ und jede in $(X, \mathcal{T})$ offene Menge G, die x enthält, ein $A \in \gamma$ und ein $S \in \sigma$ mit $x \in S \subset A \subset G$ gibt.

Aus diesem Satz folgt, dass $(F_0(X), \tau_{\mathcal{T}}^{F(X)})$ dann und nur dann Hausfdorff ist, wenn $(X, \mathcal{T})$ regulär ist. $(F_0(X), \tau_{\mathcal{T}}^{K(X)})$ ist dann und nur dann ein Hausdorff-Raum, wenn $(X, \mathcal{T})$ ein punktual kompakter Raum ist.

Für die Regularität des Raumes $(F_0(X), \tau_\sigma^\gamma)$ bewies *H. Poppe* folgenden Satz [9] *Satz* (6).

SATZ 3.21. Es sei $(X, \mathcal{T})$ ein T_1-Raum, γ ein System abgeschlossener Mengen. Dann gilt. $(F_0(X), \tau_{\mathcal{T}}^\gamma)$ ist dann und nur dann ein regulärer T_1-Raum, wenn $(F_0(X), \tau_{\mathcal{T}}^\gamma)$ T_1 ist und wenn γ folgender Bedingung genügt: Ist $F \in F_0(X)$, $A \in \gamma$ und $F \subset X - A$, so gibt es ein $B \in \gamma$ mit $F \subset X - B \subset \overline{X - B} \subset X - A$.

$(F_0(X), \tau_{\mathcal{T}}^{F(X)})$ ist folglich dann und nur dann regulär und T_1 wenn $(X, \mathcal{T})$ normal und T_1 ist.

Die letzte Eigenschaft beschäftigt sich mit de Spur der Topologie τ_σ^γ auf X.

SATZ 3.22. Die Abbildung **i**bildet dann und nur dann $(X, \mathcal{T})$ stetig in $(P_0(X), \tau_\sigma^\gamma)$ ab, wenn $\mathcal{T}^\gamma, \mathcal{T}_\sigma \subset \mathcal{T}$ ist. **i** ist dann und nur dann ein Homöomorphismus von $(X, \mathcal{T})$ auf die eipunktigen Teilmengen aus X, mit der von τ_σ^γ induzierten Topologie, wenn $\mathcal{T}_\sigma = \mathcal{T}$ und wenn jede Menge aus γ in $(X, \mathcal{T}_\sigma$ abgeschlossen ist.

LITERATURVERZEICHNIS

[1] Aull C.E. *Closed set countability axioms*, Indag. Math., vol. 128 nr. 3, 311—316, (1966).

[2] Flachsmeyer J., *Verschiedene Topologisierungen im Raum der abgeschlossenen Teilmengen*, Math. Nachr. 26, 321—337, (1964).

[3] Kelley J.L., *Allgemeine Topologie* (russische Ausgabe) Isd. Nauka Moskau 1968.

[4] Kowalsky H.J., *Topologische Räume*, Basel und Stuttgart, 1961.

[5] Kusnezov V., *Über den Raum der abbgeschlossenen Teilmengen* (russ) Dokl. Akad. Nauk S.S.S.R. 178 Nr. 6, 1248—1251, (1968).

[6] Marjanović M.M., *Topologizing the hypersets*, Publ. de l'Inst. Math. Beograd, 11(25) 123—134 (1971).

[7] Michel E., *Topologies on spaces of subsets*, Trans. Amer. Math. Soc. 71, 151—182 (1951).

[8] Poppe H., *Eine Bemerkung über Trennungsaxiome in Räumen von abgeschlossenen Teilmengen topologischer Räume*, Archiv der Math. 16 (3), 197—199, (1965).

[9] Poppe H., *Einige Bemerkungen über den Raum der abgeschlossenen Mengen*, Fund. Math. LIX. 2, 159—169, (1966).

[10] Tschoban M.M. (Ćoban M.M.), *Über die Exponentialtopologie* (russ) Dokl. Akad. Nauk S.S.S.R. 186 Nr.2, 272—274, (1969).

Eingegangen am 24. XI. 1971

Universität Craiova
Fakultät für Mathematik

ASUPRA CÎMPURILOR DE VECTORI PARALELI ALE UNOR SPAȚII A_n CU CONEXIUNE AFINĂ PROIECTIV EUCLIDIENE

L. NICOLESCU

Fiind dat un spațiu $A_n(x^1, ..., x^n)$ cu conexiune afină Γ^i_{jk}, se poate asocia acestui spațiu sistemul de ecuații diferențiale [1]

$$\frac{d^2x^i}{dt^2} = \Gamma^i_{jk} \frac{dx^j}{dt} \frac{dx^k}{dt} \tag{1}$$

sistem ce definește curbele autoparalele ale spațiului A_n.

În mod analog se poate asocia spațiul A_n sistemul de ecuații cu derivate parțiale [2]

$$A_{ij}(z) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^j \partial x^k} + \Gamma^i_{ik} \frac{\partial z}{\partial x^i} = 0 \tag{2}$$

Considerăm pentru aceasta o transformare de variabile.

$$x'^i = x'^i(x^1, ..., x^n) \qquad i = 1, 2, ..., n$$

și o transformare a funcției z

$$z' = az + b \tag{3}$$

unde a, b sînt constante și $a \neq 0$

Avem

$$\frac{\partial z}{\partial x^i} = \frac{1}{a} \frac{\partial z'}{\partial x'^r} \frac{\partial x'^r}{\partial x^i}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^i \partial x^k} = \frac{1}{a}\left(\frac{\partial^2 z'}{\partial x'^r \partial x'^s} \frac{\partial x'^r \partial x'^s}{\partial x^j \partial x^k} + \frac{\partial z'}{\partial x'^r} \frac{\partial^2 x'^r}{\partial x^j \partial x^k}\right)$$

Rezultă

$$A_{jk}(z) = \frac{1}{a}\left[\frac{\partial^2 z'}{\partial x'^r \partial x'^s} \frac{\partial x'^r}{\partial x^j} \frac{\partial x'^s}{\partial x^k} + \left(\frac{\partial^2 x'^i}{\partial x^j \partial x^k} + \Gamma^r_{jk} \frac{\partial x'^i}{\partial x^r}\right) \frac{\partial z'}{\partial x'^i}\right]$$

Dacă ținem seama de legea de transformare a conexiunii.

$$\frac{\partial^2 x'^i}{\partial x^j \partial x^k} = \Gamma'^i_{rs} \frac{\partial x'^r}{\partial x^j} \frac{\partial x'^s}{\partial x^k} - \Gamma^r_{jk} \frac{\partial x'^i}{\partial x^r}$$

obținem formulele:

$$A_{jk}(z) = \frac{1}{a} A'_{rs}(z') \frac{\partial x'^r}{\partial x^j} \frac{\partial x'^s}{\partial x^k}$$

Deci sistemul (2) se schimbă în sistemul

$$A'_{jk}(z') = \frac{\partial^2 z'}{\partial x'^j \partial x'^k} + \Gamma'^i_{jk} \frac{\partial z'}{\partial x'^i} = 0$$

Sistemul de ecuaţii cu derivate parţiale (2) este deci un sistem invariant asociat spaţiului A_n, cu condiţia ca funcţia z să fie considerată ca un invariant sau ca o funcţie care suferă chiar o transformare liniară (3).

Sistemul (2) se poate deduce din ecuaţiile transportului paralel al unui vector covariant f_j, ce derivă dintr-un potenţial z, deci $v_j = \frac{\partial z}{\partial x^j}$

În adevăr, ecuaţiile transportului paralel al unui vector covariant v_j sînt

$$dv_j + \Gamma^i_{jk} v_i dx^k = 0$$

de unde

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^j \partial x^k} + \Gamma^i_{jk} \frac{\partial z}{\partial x^i} = 0$$

Rezultă că a găsi o soluţie a sistemului (2) revine la a găsi un vector covariant derivînd dintr-un potenţial şi care se transportă în A_n prin paralelism. În general dacă spaţiul A_n este oarecare, asemenea vectori nu există deoarece condiţiile de integrabilitate ale sistemului (2), care se scriu

$$T^i_{jk} \frac{\partial z}{\partial x^i} = 0 \quad \Gamma^i_{jkl} \frac{\partial z}{\partial x^i} = 0 \tag{4}$$

unde T^i_{jk} şi Γ^i_{jkl} sînt tensorii de torsiune şi de curbură ai spaţiului A_n, n-au altă soluţie decît soluţia banală $z = \text{const}$. Dacă spaţiul A_n este local euclidian, deci $T^i_{jk} = 0$, $\Gamma^i_{jkl} = 0$ atunci condiţiile de integrabilitate (4) sînt identic satisfăcute şi sistemul (2) admite şi soluţii diferite de soluţia banală

* * *

Se ştie că dacă A_n este un spaţiu riemanian cu curbură constantă, atunci există un sistem de coordonate, astfel încît să avem: $\Gamma^i_{jk} = \delta^i_j \varphi_k + \delta^i_k \varphi_j$, unde, funcţiile $\varphi_j (i = 1, 2, ..., n)$ derivă dintr-un potenţial, deci avem: $\varphi_j = \frac{\partial \varphi}{\partial x^j}$, $j = 1, 2, ..., n$

În acest caz, spaţiul riemanian poate fi considerat ca o hipersferă, iar problema cîmpurilor de vectori paraleli la o hipersferă este rezolvată.

Ne propunem acum să studiem cazul cînd spaţiul A_n este proiectiv euclidian adică există un sistem de coordonate astfel încît să avem:

$$\Gamma^i_{jk} = \delta^j_i \varphi_k + \delta^i_k \varphi_j$$

unde φ_i reprezintă componentele unui vector covariant arbitrar. Dacă presupunem în plus că φ_i derivă dintr-un potențial, atunci avem:

$$\varphi_i = \frac{\partial \varphi}{\partial x^i}$$

Să căutăm acum vectorii v_i care derivă dintr-un potențial, adică să avem $v_i = \frac{\partial z}{\partial x^i}$ și care să se transporte prin paralelism în A_n.

Trebuiesc căutate condițiile de integrabilitate ale sistemului (2) în cazul cînd avem:

$$\Gamma^i_{jk} = \delta^i_j \frac{\partial \varphi}{\partial x^k} + \delta^i_k \frac{\partial \varphi}{\partial x^j} \tag{5}$$

Ținînd cont de (5) sistemul (2) se scrie:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^j \partial x^k} + \frac{\partial z}{\partial x^j}\frac{\partial \varphi}{\partial x^k} + \frac{\partial z}{\partial x^k}\frac{\partial \varphi}{\partial x^j} = 0 \tag{6}$$

Considerînd condițiile de integrabilitate ale sistemului (6)

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^j \partial x^k \partial x^l} = \frac{\partial^3 z}{\partial x^j \partial x^l \partial x^k}$$

se obține

$$\frac{\partial z}{\partial x^k}\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^j \partial x^l} + \frac{\partial \varphi}{\partial x^j}\frac{\partial \varphi}{\partial x^l}\right) - \frac{\partial z}{\partial x^l}\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^j \partial x^k} + \frac{\partial \varphi}{\partial x^j}\frac{\partial \varphi}{\partial x^k}\right) = 0$$

de unde rezultă că trebuie să avem:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^j \partial x^l} + \frac{\partial \varphi}{\partial x^j}\frac{\partial \varphi}{\partial x^l} = \lambda_j \frac{\partial \varphi}{\partial x^l} \tag{6'}$$

Din simetria în j și l a primului membru al relației (6′) rezultă că avem:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^j \partial x^l} + \frac{\partial \varphi}{\partial x^j}\frac{\partial \varphi}{\partial x^l} = \lambda \frac{\partial z}{\partial x^j}\frac{\partial z}{\partial x^l} \tag{7}$$

unde λ este o funcție de $x^1, \ldots, x^n$
Făcînd substituțiile:

$$\Psi = e^{\varphi} \tag{7'}$$

$$X = e^{\varphi} z \tag{7''}$$

din (6) și (7) obținem:

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^j \partial X^l} = \lambda \Psi \frac{\partial z}{\partial x^j}\frac{\partial z}{\partial x^l} \tag{8}$$

$$\frac{\partial^2 X}{\partial x^j \partial x^l} = \lambda X \frac{\partial z}{\partial x^j}\frac{\partial z}{\partial x^l} \tag{9}$$

de unde rezultă că avem:

$$\frac{1}{X}\frac{\partial^2 X}{\partial x^j \partial x^l}\frac{1}{\Psi}\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^j \partial x^l} \tag{10}$$

Sistemul (10) are drept necunoscută pe X deoarece $\Psi = e^{\varphi}$ este cunoscut, Evident în acest caz obținem o soluție particulară $X = k\Psi$, unde $k = \text{const}$. dar această soluție nu poate fi acceptată deoarece din (7′) și (7″) ar rezulta $z = \text{const}$. Problema se reduce deci la cazul cînd sistemul (10) admite și alte soluții în afară de $X = k\Psi$ ($k = \text{const}$).

Am obținut următorul rezultat:

Condiția necesară și suficientă ca un spațiu A_n cu conexiune afină proiectiv euclidian, avînd componentele conexiunii

$$\Gamma^i_{jk} = \delta^i_j \frac{\partial \varphi}{\partial x^k} + \delta^i_k \frac{\partial \varphi}{\partial x^j}$$

să admită cel puțin un vector $v_i = \frac{\partial z}{\partial x^i}$ ce se trans portă prin paralelism, este ca sistemul

$$\frac{1}{X}\frac{\partial^2 X}{\partial x^j \partial x^k} = \frac{1}{\Psi}\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^j \partial x^k}$$

unde $\Psi = e^{\varphi}$ să admită și altă soluție în afară de $X = k\Psi$ ($k = const$).

Un caz particular se obține cînd $z = \varphi$. În acest caz ecuațiile (6) ne dau :

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^j \partial x^k} + 2\frac{\partial \varphi}{\partial x^j}\frac{\partial \varphi}{\partial x^k} = 0$$

care se mai scriu

$$\frac{\partial^2 e^{2\varphi}}{\partial x^j \partial x^k} = 0$$

de unde rezultă că avem:

$$e^{2\varphi} = a_r x^r + b$$

În acest caz avem:

$$\varphi = \frac{1}{2}\, ln\, (a_r x^r + b)$$

iar componentele conexiunii se scriu:

$$\Gamma^i_{jk} = \frac{1}{2}\,\delta^i_j \frac{a_k}{a_r x^r + b} + \frac{1}{2}\,\delta^i_k \frac{a_j}{a_p x^r + b}$$

BIBLIOGRAFIE

1) Gh. Vrănceanu — *„Lecții de geometrie diferențială"* vol. I E.D.P. București, 1962, vol. II E.D.P. București 1964

2) Gh. Vrănceanu — *„Sur les éspaces à connexion projective "Comptes Rendus Hebdomadaires des Séances de l'Academie des Sciences*, Paris, 242, 1955, p. 61—63.

CONSIDÈRATIONS SUR LES CHAMPS DE VECTEURS PARALLÈLES DE QUEQLUES ESPACES A_n AVEC CONNEXION AFFINE PROJECTIFS EUCLIDIENS.

Résumé

On demontre que: La condition nécéssaire et suffisante que l'espace A_n avec connexion affine projectif euclidien ayant les composantes de la connexion

$$\Gamma^i_{jk} = \delta^i_j \frac{\partial \varphi}{\partial x^k} + \delta^i_k \frac{\partial \varphi}{\partial x^j}$$

admet au moins un vecteur $V_i = \dfrac{\partial z}{\partial x^i}$ qui se transporte par parallelisme, est que le systeme

$$\frac{1}{X} \frac{\partial^2 X}{\partial x^j \partial x^k} = \frac{1}{\Psi} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^j \partial x^k}$$

où $\Psi = e^{2\varphi}$ admet aussi une autre solution que la solution $x = k\Psi$ ($k = const.$)

Primit la 21.I.1972

Universitatea Bucureşti
Facultatea de Matematică-Mecanică

INEGALITĂȚI PENTRU ȘIRURI DE VARIABILE ALEATOARE SIMETRIC DEPENDENTE.

O. POPESCU

Lucrarea își propune să studieze unele proprietăți ale șirurilor de variabile aleatoare simetric dependente cu privire la inegalități pentru sume de variabile aleatoare.

Se extind o serie de rezultate cunoscute la independență, cum ar fi: inegalitatea lui Kolmogorov, a lui Pearson, a lui Marczinckiewicz și Zygmund, a lui P. Lévy, a lui Cantelli etc.

1. Introducere. Fie $\{X_n;\ n \geqslant 1\}$ un șir de variabile aleatoare definite pe spațiul probabilistic $\{\Omega, \mathcal{K}, P\}$.

Dacă notăm

$$F_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = P\{X_1 < x_1, X_2 < x_2, \ldots, X_n < x_n\}$$

și

$$F_{i_1, i_2, \ldots, i_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = P\{X_{i_1} < x_1, X_{i_2} < x_2, \ldots, X_{i_n} < x_n\}$$

atunci șirul de variabile aleatoare considerat se numește simetric dependent dacă

$$F_{i_1, i_2, \ldots, i_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = F_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

pentru orice alegere de întregi pozitivi distincți $i_1, i_2, \ldots, i_n$ și orice $n = 1, 2, \ldots$

Un rezultat fundamental în studiul acestor variabile aleatoare aparține lui Bruno de Finetti care a stabilit (vezi [5]) o reprezentare a funcției de repartiție $F_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $n \in N^*$ dată cu ajutorul unei familii de funcții de repartiție unidimensionale $\{G_\omega(x)\}_{\omega \in \Omega}$, definitiă astfel încît, pentru fiecare $x \in R$ fixat, $G_\omega(x)$ este o variabilă aleatoare definită pe un cîmp de probabilitate $\{\Omega, \mathcal{K}, P\}$, iar pentru fiecare $\omega \in \Omega$, o funcție de repartiție.

Teorema lui Finetti (vezi [1]) arată că pentru orice mulțime boreliană n-dimensională H:

$$P(H) = \int_\Omega P_\omega(H)\, dP(\omega) \tag{1.1}$$

unde $P_\omega(H)$ se calculează în ipoteza că variabilele aleatoare X_n sînt mutual independente și identic repartizate cu funcția de repartiție comună $G_\omega(x)$.

Următorul rezultat (vezi [3]) este deseori utilizat în teoria variabilelor aleatoare simetric dependente.

Dacă $\{X_n;\ n \geqslant 1\}$ este un șir de variabile aleatoare simetric dependente, atunci pentru orice funcție f, n-dimensională, măsurabilă Borel și integrabilă avem:

$$M(f) = \int_{\Omega} M_{\omega}(f)\ dP(\omega) \tag{1.2}$$

unde $M_{\omega}(f)$ este media lui f calculată în ipoteza că variabilele aleatoare X_n sînt mutual independente și identic repartizate cu funcția de repartiție comună $G_{\omega}(x)$.

Mai menționăm și un alt rezultat important, obținut în 1962 de către S. Berman.

El arată (vezi [1]) că dacă $\{X_n;\ n \geqslant 1\}$ este un șir de variabile aleatoare simetric dependente cu variabilele simetrice (adică a căror funcție de repartiție satisface relația $F(x) = 1 - F(-x)$), atunci funcțiile $\{G_{\omega}(x)\}$, corespunzătoare reprezentării (1.1), sînt simetrice aproape pentru toți ω, adică

$$G_{\omega}(x) = 1 - G_{\omega}(-x) \tag{1.3}$$

pentru toate valorile lui X din mulțimea punctelor de continuitate ale lui $G_{\omega}(x)$.

2. Inegalități

Fie $\{\Omega, \mathfrak{K}, P\}$ un spațiu probabilistic și $\{X_n;\ n \geqslant 1\}$ un șir de variabile aleatoare simetric dependente definite pe acest spațiu.

Pentru fiecare $\omega \in \Omega$ definim pe $\mu(\omega)$ și $\sigma(\omega)$, corespunzătoare reprezentării (1.1), prin

$$\mu(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x dG_{\omega}(x) \quad \text{și} \quad \sigma^2(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} [x - \mu(\omega)]^2\ dG_{\omega}(x)$$

cu condiția ca integralele să fie convergente, unde $\{G_{\omega}(x)\}_{\omega \in \Omega}$ este familia de funcții de repartiție unidimensională din reprezentarea lui de Finetti.

Ne propunem să extindem unele rezultate valabile pentru șiruri de variabile aleatoare independente și identic repartizate la șiruri de variabile aleatoare simetric dependente.

Astfel calculînd dispersia sumei de variabile aleatoare simetric dependente obținem:

$$D^2\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = M\left[\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^2\right] - M^2\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = nM(X_1^2) +$$
$$+ n(n-1)\ M(X_1X_2) - n^2M^2(X_1)$$

În ipoteza că variabilele aleatoare X_n, au media zero se obține:

$$D^2\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = nM(X_1^2) + n(n-1)\ M(X_1X_2)$$

deci un rezultat diferit de cel obținut la independență.

Conform cu (1.2) avem pentru $i \neq j$,

$$M(X_i X_j) = \int_\Omega \mu^2(\omega)\, dP(\omega) \tag{2.1}$$

Presupunînd că

$$P\{\mu(\omega) = 0\} = 1 \tag{2.2}$$

avem, pentru $i \neq j$;

$$M(X_i X_j) = 0 \tag{2.3}$$

Invers, presupunînd că (2.3) are loc pentru $i \neq j$ obținem

$$\int_\Omega \mu^2(\omega)\, dP(\omega) = 0 \tag{2.4}$$

Relația (2.4) implică (2.2).

Am demonstrat următoarea teoremă.

T e o r e m a 2.1. Dacă $\{X_n;\ n \geqslant 1\}$ este un șir de variabile aleatoare simetric dependente cu media zero, atunci

$$D^2\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = nD^2(X_1)$$

dacă și numai dacă $P\{\mu(\omega) = 0\} = 1$.

Observăm imediat din (1.3) că pentru variabilele aleatoare simetric dependente și simetrice are loc relația (2.2) și deci putem enunța

C o r o l a r u l 2.1. Dacă $\{X_n;\ n \geqslant 1\}$ este un șir de variabile aleatoare simetric dependente și simetrice, atunci

$$D^2\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = nD^2(X_1)$$

O b s e r v a ț i a 2.1. Orice rezultat valabil, în condiția (2.2), pentru șirurile de variabile aleatoare simetric dependente cu media zero rămîne valabil și în cazul șirurilor de variabile aleatoare simetric dependente și simetrice. Aceasta rezultă imediat din (1.3).

În teorema următoare vom generaliza inegalitatea lui Kolmogorov demonstrată pentru cazul cînd variabilele aleatoare X_n sînt independente și identic repartizate.

T e o r e m a 2.2. Fie $\{X_n;\ n \geqslant 1\}$ un șir de variabile aleatoare simetric dependente cu media zero și

$$S_k = X_1 + X_2 + \ldots + X_k;\ k = 1, 2, \ldots, n. \text{ Atunci}$$

$$P\{\max_{1 \leqslant i \leqslant n} |S_i| > \varepsilon\} \leqslant \frac{nM(X_1^2)}{\varepsilon^2}$$

dacă $P\{\mu(\omega) = 0\} = 1$

D e m o n s t r a ţ i e. Folosind reprezentarea (1.1) obţinem

$$P\{\max_{1\leqslant i\leqslant n} |S_i| > \varepsilon\} = \int_\Omega P_\omega\{\max_{1\leqslant i\leqslant n} |S_i| > \varepsilon\}\, dP(\omega). \tag{2.5}$$

Din inegalitatea lui Kolmogorov corespunzătoare cazului cînd variabilele aleatoare sînt independente şi identic repartizate iar $\mu(\omega) = 0$ avem

$$P_\omega\{\max_{1\leqslant i\leqslant n} |S_i| > \varepsilon\} \leqslant \frac{1}{\varepsilon^2}\, nM_\omega(X_1^2) \tag{2.6}$$

Dacă (2.2) are loc, atunci din (1.2) şi (2.6) putem scrie

$$P\{\max_{1\leqslant i\leqslant n} |S_i| > \varepsilon\} \leqslant \frac{1}{\varepsilon^2}\, nM(X_1^2)$$

şi teorema este demonstrată.

Teorema care urmează reprezintă o generalizare a inegalităţii lui Marczinckiewicz şi Zygmund (vezi [11]) cu privire la majorarea momentelor unei sume de variabile aleatoare cu ajutorul momentelor variabilelor considerate. Mai precis vom arăta

T e o r e m a 2.3. Dacă $\{X_n;\ n \geqslant 1\}$ este un şir de variabile aleatoare simetric dependente, cu media zero, care admit momente de ordinul $2r$ cu $r \geqslant 1$, atunci dacă $P\{\mu(\omega) = 0\} = 1$ avem

$$M\left\{\left|\sum_{k=1}^n X_k\right|^{2r}\right\} \leqslant An^r M\{|X_1|^{2r}\}$$

unde A este o constantă pozitivă ce depinde numai de r şi independentă de şirul $\{X_n;\ n \geqslant 1\}$ considerat.

D e m o n s t r a ţ i e. Conform cu (1.1) avem

$$M\left\{\left|\sum_{k=1}^n X_k\right|^{2r}\right\} = \int_\Omega M_\omega\left\{\left|\sum_{k=1}^n X_k\right|^{2r}\right\} dP(\omega)$$

Deoarece $\mu(\omega) = 0$ aproape sigur, avem

$$M_\omega\left(\sum_{k=1}^n X_k\right) = 0$$

aproape sigur. Mai departe aplicînd teorema lui Marczinckiewicz şi Zygmund (vezi [11]), precum şi (1.2), obţinem dacă (2.2) are loc:

$$M\left\{\left|\sum_{k=1}^n X_k\right|^{2r}\right\} \leqslant \int_\Omega An^{r-1} \sum_{k=1}^n M_\omega\{|X_k|^{2r}\}\, dP(\omega) =$$

$$= An^{r-1} \sum_{k=1}^n M\{|X_k|^{2r}\} = An^r M\{|X_1|^{2r}\}$$

şi teorema este demonstrată.

Să observăm că valoarea constantei A nu este diferită de cea obținută în cazul variabilelor aleatoare independente și identic repartizate.

În cele ce urmează vom de o inegalitate de tip Kolmogorov stabilită de autor în lucrarea [13]. Această inegalitate valabilă pentru variabile aleatoare oarecare va fi apoi aplicată în cazul sumelor de variabile aleatoare simetric dependente.

Mai întîi vom da două leme

L e m a 2.1. Fie $Y = (Y_1, Y_2, ..., Y_n)$ un vector aleator cu $M(Y) = \mu = (\mu_1, \mu_2, ..., \mu_n)$ și $f \geqslant 0$, o funcție reală convexă, definită pe $R,^n$ neidentic nulă și mărginită.

Atunci pentru orice $\varepsilon > 0$

$$P\{f(Y) \geqslant \varepsilon\} \geqslant \frac{f(\mu) - \varepsilon}{\lambda} \tag{2.7}$$

unde $\lambda = \sup\limits_{y \in R^n} f(y)$

D e m o n s t r a ț i e. Din calculul mediei rezultă

$$M[f(Y)] = \int_{R^n} f(y)\, dF(y) = \int\limits_{\{y;\, f(y) < \varepsilon\}} f(y)\, dF(y) + \int\limits_{\{y;\, f(y) \geqslant \varepsilon\}} f(y)\, dF(y) \leqslant \varepsilon + \lambda P\{f(y)\} \geqslant \varepsilon\}$$

de unde

$$P\{f(Y) \geqslant \varepsilon\} \geqslant \frac{M[f(y)] - \varepsilon}{\lambda} \tag{2.8}$$

Ne folosim de faptul că f este convexă și scriem inegalitatea lui Jensen pentru funcțiile convexe:

$$M[f(Y)] \geqslant f[M(Y)] = f(\mu). \tag{2.9}$$

Înlocuind pe (2.9) în (2.8) se obține (2.7) și lema este demonstrată.

O b s e r v a ț i a 2.2. Avem $\frac{f(\mu) - \varepsilon}{\lambda} \leqslant 1$, deoarece $f(\mu) \leqslant \lambda$.

O b s e r v a ț i a 2.3. Inegalitatea este nebanală dacă are loc condiția $\frac{f(\mu) - \varepsilon}{\lambda} \geqslant 0$, adică dacă $f(\mu) \geqslant \varepsilon$.

L e m a 2.2. Pentru orice funcție omogenă, $g \geqslant 0$, definită pe R^n și mărginită, cu $\lambda = \sup\limits_{x \in R^n} g(x)$, există un vector aleator Y_o cu $M(Y_o) = \mu$ astfel încît pentru orice $\varepsilon > 0$ și $g(\mu) \geqslant \varepsilon$ să avem

$$P\{g(Y_o) \geqslant \varepsilon\} = \frac{g(\mu) - \varepsilon}{\lambda}$$

D e m o n s t r a ț i e. Considerăm vectorul Y_o cu repartiția dată de

$$P\left\{Y_o = \frac{\lambda}{g(\mu) - \varepsilon}\mu\right\} = \frac{g(\mu) - \varepsilon}{\lambda}$$

$$P\{Y_o = 0\} = 1 - \frac{g(\mu) - \varepsilon}{\lambda}$$

Demonstrația lemei se reduce la a arăta că

$$M(Y_o) = \mu \text{ și } P\{g(Y_o) \geqslant \varepsilon\} = P\left\{Y_o = \frac{\lambda}{g(\mu) - \varepsilon}\mu\right\} = \frac{g(\mu) - \varepsilon}{\lambda}$$

Mai întîi se observă că

$$M(Y_o) = \frac{\lambda}{g(\mu) - \varepsilon} \cdot \frac{g(\mu) - \varepsilon}{\lambda} = \mu$$

Din repartiția vectorului Y_o se poate scrie

$$P\left\{Y_o = \frac{\lambda}{g(\mu) - \varepsilon}\mu\right\} = P\left\{g(Y_o) = g\left(\frac{\lambda}{g(\mu) - \varepsilon}\mu\right)\right\}.$$

Rămîne să arătăm că

$$P\{g(Y_o) \geqslant \varepsilon\} = P\left\{g(Y_o) = g\left(\frac{\lambda}{g(\mu) - \varepsilon} \cdot \mu\right)\right\}.$$

Aceasta revine la a arăta că

$$g\left(\frac{\lambda}{g(\mu) - \varepsilon}\mu\right) \geqslant 0. \tag{2.10}$$

Din omogenitatea lui g rezultă

$$g\left(\frac{\lambda}{g(\mu) - \varepsilon}\mu\right) = \left[\frac{\lambda}{g(\mu) - \varepsilon}\right]^{\alpha} \cdot g(\mu) \tag{2.11}$$

în care α reprezintă gradul de omogenitate.

Înlocuind pe (2.11) în (2.10) se obține

$$\left[\frac{\lambda}{g(\mu) - \varepsilon}\right]^{\alpha} \cdot g(\mu) \geqslant \varepsilon$$

sau

$$\left[\frac{\lambda}{g(\mu) - \varepsilon}\right]^{\alpha}, \frac{g(\mu)}{\varepsilon} \geqslant 1$$

care este satisfăcută dacă

$$\lambda \geqslant g(\mu) \geqslant \varepsilon$$

Inegalitatea (2.10) fiind adevărată, lema este demonstrată.

Teorema 2.4. Fie $Y = (Y_1, Y_2, ..., Y_n)$ un vector aleator cu $M(Y) = (\mu_1, \mu_2, ..., \mu_n)$ și $\varphi \geqslant 0$, o funcție reală convexă mărginită și omogenă definită pe R^n.

Atunci pentru orice $\varepsilon > 0$ avem

$$P\{\varphi(Y) \geqslant \varepsilon\} \geqslant \frac{\varphi(\mu) - \varepsilon}{\lambda} \tag{2.12}$$

unde $\lambda = \sup_{y \in R^n} \varphi(y)$ și egalitatea poate fi atinsă dacă

$$\lambda \geqslant \varphi(\mu) \geqslant \varepsilon$$

Demonstrație. Teorema 2.4. este o consecință imediată a lemelor 2.1. și 2.2

Definiția 2.1. O inegalitate $P\{Y \in T\} \geqslant K$ valabilă pentru toate variabilele aleatoare ale unei familii $\mathcal{J}$, se spune că este exactă în raport cu familia $\mathcal{J}$ (vezi [12]) dacă ea nu poate fi îmbunătățită, adică pentru orice $\delta > 0$ există o variabilă aleatoare $Y_0 \in \mathcal{J}$ astfel ca $P\{Y_0 \in T\} \geqslant K + \delta$ să fie falsă și deci $P\{Y_0 \in T\} < K + \delta$

Teorema 2.5. În condițiile teoremei 2.4, inegalitatea

$$P\{\varphi(Y) \geqslant \varepsilon\} \geqslant \frac{\varphi(\mu) - \varepsilon}{\lambda}$$

este exactă.

Demonstrație. Presupunem că nu este exactă și deci poate fi îmbunătățită. Adică există un număr $\varepsilon_0 < \varepsilon$ astfel încît

$$P\{\varphi(Y) \geqslant \varepsilon\} \geqslant \frac{\varphi(\mu) - \varepsilon_0}{\lambda} \tag{2.13}$$

Să considerăm un număr ε_1 care îndeplinește condiția

$$\varepsilon_0 < \varepsilon_1 < \varepsilon \tag{2.14}$$

Din condițiile teoremei 2.4 rezultă că putem găsi un vector Y_1 cu $M(Y_1) = \mu$ astfel încît

$$P\{\varphi(Y_1) \geqslant \varepsilon_1\} = \frac{\varphi(\mu) - \varepsilon_1}{\lambda} \tag{2.15}$$

Din (2.13), (2.14), (2.15) putem scrie

$$\frac{\varphi(\mu) - \varepsilon_1}{\lambda} = P\{\varphi(Y_1) \geqslant \varepsilon_1\} \geqslant P\{\varphi(Y) \geqslant \varepsilon\} \geqslant \frac{\varphi(\mu) - \varepsilon_0}{\lambda}$$

Această relație este falsă deoarece conform alegerii numerelor ε_0 și ε_1 avem

$$\frac{\varphi(\mu) - \varepsilon_1}{\lambda} < \frac{\varphi(\mu) - \varepsilon_0}{\lambda}$$

și deci teorema este demonstrată.

În continuare vom da o versiune, a inegalității (2.12) pentru cazul sumelor de variabile aleatoare simetric dependente.

Teorema 2.6. Fie $\{X_n; n \geqslant 1\}$ un șir de variabile aleatoare simetric dependente și mărginite și ε, o constantă pozitivă. Atunci, dacă notăm cu

$$M = \sup |X_1 + X_2 + \ldots + X_n| \text{ avem}$$

$$P\{|X_1 + X_2 + \ldots + X_n| \geqslant \varepsilon\} \geqslant \frac{|M(X_1)| - \varepsilon}{M}$$

Demonstrație. Notînd $\varphi(x) = |X_1 + X_2 + \ldots + X_n|$ și aplicînd inegalitatea de tip Kolmogorov (2.12) stabilită în teorema 2.4 obținem

$$P\{|X_1 + X_2 + \ldots + X_n| \geqslant \varepsilon\} \geqslant \frac{|M(X_1) + M(X_2) + \ldots + M(X_n)| - \varepsilon}{M}$$

Din condiția de simetric dependență a variabilelor aleatoare $X_1, X_2, \ldots X_n$ avem

$$|M(X_1) + M(X_2) + \ldots + M(X_n)| = n\,|M(X_1)| \text{ și atunci}$$

$$P\{|X_1 + X_2 + \ldots + X_n| \geqslant \varepsilon\} \geqslant \frac{n|M(X_1)| - \varepsilon}{M}$$

Vom da acum o teoremă analoagă celei date de P. Lévy (vezi [9]), cu privire la sumele de variabilele aleatoare independente și simetrice.

Teorema 2.7. Dacă $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sînt variabile aleatoare simetric dependente și simetrice și $S_k = \sum_{i=1}^{k} X_i$, atunci pentru $\varepsilon > 0$, au loc următoarele relații:

$$\text{(I)} \quad P\{\max_{k \leqslant n} S_k \geqslant \varepsilon\} \leqslant 2P\{S_n \geqslant \varepsilon\}$$

$$\text{(II)} \quad P\{\max_{k \leqslant n} |S_k| \geqslant \varepsilon\} \leqslant 2P\{|S_n| \geqslant \varepsilon\}$$

Demonstrație. Să notăm $S_0 = 0$, $S_k^* = \max_{j \leqslant k} S_j$ și să considerăm evenimentele

$$A_k = \{S_{k-1}^* < \varepsilon,\ S_k \geqslant \varepsilon\}$$
$$B_k = \{S_n - S_k \geqslant 0\}$$

Avem în mod evident $A_i \cdot A_j = 0$ pentru orice $i \neq j$ și

$$\{S_n^* \geqslant \varepsilon\} = \bigcup_{k=1}^{n} A_k \tag{2.16}$$

Mai departe

$$\{S_n \geqslant \varepsilon\} \supset \bigcup_{k=1}^{n} A_k B_k$$

după cum se poate verifica cu ușurință.

De aici avem

$$P\{S_n \geqslant \varepsilon\} \geqslant \sum_{k=1}^{n} P\{A_k B_k\} \tag{2.17}$$

Conform cu (1.1) avem

$$P\{A_k B_k\} = \int_\Omega P_\omega(A_k B_k)\, dP(\omega) \tag{2.18}$$

Pe de altă parte din ipoteza de simetrie a variabilelor aleatoare simetric dependente și din (1.3) avem

$$P_\omega(B_n) \geqslant \frac{1}{2} \tag{2.19}$$

Înlocuind pe (2.19) în (2.18) obținem

$$\int_\Omega P_\omega(A_k B_k)\, dP(\omega) \geqslant \frac{1}{2} \int_\Omega P_\omega(A_k)\, dP(\omega) = \frac{1}{2} P(A_k) \tag{2.20}$$

Din (2.17), (2.18) și (2.20) avem

$$2P\{S_n \geqslant \varepsilon\} \geqslant \sum_{k=1}^{n} P(A_k) \tag{2.21}$$

iar din (2.16)

$$\sum_{k=1}^{n} P(A_k) = P\{S_n^* \geqslant \varepsilon\} \tag{2.22}$$

Înlocuind pe (2.22) în (2.21) și ținînd cont că

$$S_k^* = \max_{j \leqslant k} S_j \text{ rezultă}$$

$$P\{\max_{k \leqslant n} S_k \geqslant \varepsilon\} \leqslant 2P\{S_n \geqslant \varepsilon\}$$

și prima parte a teoremei este demonstrată.

Schimbînd semnul variabilelor aleatoare (care rămîn prin această schimbare tot simetrice) și combinînd inegalitatea obținută cu (I) obținem (II).

Vom da acum o variantă a unei inegalități a lui Pearșon pentru cazul variabilelor aleatoare simetric dependente și simetrice.

Teorema 2.8. Fie $\{X_n;\ n \geqslant 1\}$ un șir de variabile aleatoare simetric dependente cu media zero și λ, o constantă pozitivă. Atunci pentru orice $r > 2$:

$$P\{|X_1 + X_2 + \ldots + X_n| \geqslant \lambda\} \leqslant \frac{An^{\frac{r}{2}}}{\lambda^r} M\{|X_1|\}$$

dacă $P\{\mu(\omega) = 0\} = 1$

A fiind o constantă pozitivă independentă de șirul de variabile aleatoare considerat.

D e m o n s t r a ț i e. Rezultă imediat din amintita teoremă a lui Pearson (vezi [14]) precum și din teorema 2.3, dată mai sus.

În cele ce urmează vom obține o margine superioară pentru valoarea medie a variabilei aleatoare

$$\sup_{k=1,2,\dots n} (S_k^* - ck)^+ \text{ unde } S_n^* = X_1' + X_2' + \dots + X_n' - n\mu, \ \{X_n;\ n \geqslant 1\}$$

fiind un șir de variabile aleatoare simetric dependente, unde am notat $\mu = M(X_1')$, iar c o constantă pozitivă arbitrară.

T e o r e m a 2.9. Dacă $\{X_n';\ n \geqslant 1\}$ este un șir de variabile aleatoare simetric dependente ce admit diseprsii finite, $X_n = X_n' - \mu - c$, $\mu = M(X_1')$ și c, o constantă pozitivă arbitrară, atunci

$$M\,[\max_{1 \leqslant i \leqslant n} (S_i)^+] \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{ck} D^2(X_1)$$

unde $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$.

D e m o n s t r a ț i e. Se știe (vezi M. Kaç [7]) că, dacă $\{X_n;\ n \geqslant 1\}$ este un șir de variabile aleatoare simetric dependente, atunci:

$$M[\max\,(0,\ S_1, \dots, S_n)^+] = \sum_{k=1}^{n} \int_{\{S_k > 0\}} X_1\, dP \tag{2.23}$$

unde $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$, $n = 1, 2, \dots$

Fie

$$X_n = X_n' - \mu - c \tag{2.24}$$

Înlocuind pe (2.24) în (2.23) obținem

$$M\{\max_{1 \leqslant k \leqslant n} [S_k' - (c + \mu)\, k]^+\} = \sum_{k=1}^{n} \int_{\{S_k' - (c+\mu)\, k > 0\}} (X_1' - \mu - c)\, dP \tag{2.25}$$

unde $S_n' = X_1' + X_2' + \dots + X_n'$

Din ipoteza de simetric dependență, avem

$$\int_{\{S_k > 0\}} X_1\, dP = \int_{\{S_k > 0\}} X_2\, dP = \dots = \int_{\{S_k > 0\}} X_k\, dP$$

și deci

$$\int_{\{S_k > 0\}} X_1 dP = \frac{1}{k} \int_{\{S_k > 0\}} S_k \cdot dP \tag{2.26}$$

Din (2.26) şi (2.25) se obţine

$$M\{\max_{1 \leqslant k \leqslant n} [S'_k - (c + \mu) k]^+\} = \sum_{k=1}^{n} \int_{\{S'_k - (c+\mu) k > 0\}} \frac{X'_1 + X'_2 + \ldots + X'_k - (c + \mu) k}{k} dP \tag{2.27}$$

Să notăm acum

$$A_k = \{S'_k - (c + \mu) k > 0\} \text{ pentru } k = 1, 2, \ldots, n.$$

Din inegalitatea lui Cebîşev aplicată în ipotezele teoremei 2.9, obţinem

$$P(A_i) \leqslant \frac{1}{c^2 i} \cdot D^2[X'_i - \mu]$$

Aplicînd acum inegalitatea lui Schwarz, obţinem

$$M\{\max_{1 \leqslant k \leqslant n} [S'_k - (c + \mu) k]^+\} \leqslant \sum_{k=1}^{n} P^{\frac{1}{2}}(A_k) M^{\frac{1}{2}} \left[\frac{X'_1 + X'_2 + \ldots + X'_k - (c + \mu)k}{k}\right]^2 \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{c\sqrt{k}} D[X'_k - \mu] \cdot \frac{1}{k} \sqrt{M[X'_1 + X'_2 + \ldots + X'_k - (c + \mu)k]^2} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{c\sqrt{k}} \cdot \frac{1}{k} \sqrt{M[(X'_1 - c - \mu) + (X'_2 - c - \mu) + \ldots + (X'_k - c - \mu)]^2} \cdot D(X_1) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{c\sqrt{k}} \cdot \frac{1}{k} \cdot \sqrt{k}\, M^{\frac{1}{2}} \{[X'_1 - \mu - c]^2\} \cdot D(X_1) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{ck} D^2(X_1)$$

şi teorema este demonstrată.

Ne propunem acum să dăm o extindere a unei inegalităţi unilaterale a lui F.P. Cantelli (vezi [4]).

T e o r e m a 2.10. Fie $\{X_n; n \geqslant 1\}$ un şir de variabile aleatoare simetric dependente cu media zero, care admit momente de ordinul doi finite şi λ o constantă arbitrară.

Pentru $\lambda < 0$ avem:

$$P\{X_1 + X_2 + \ldots + X_n \leqslant \lambda\} \leqslant \int_\Omega \frac{nM_\omega(X_1^2)}{nM_\omega(X_1^2) + \lambda^2} \cdot dP(\omega)$$

dacă $P\{\mu(\omega) = 0\} = 1$

Pentru $\lambda \geqslant 0$ avem:

$$P\{X_1 + X_2 + \ldots + X_n \leqslant \lambda\} \geqslant 1 - \int_\Omega \frac{nM_\omega(X_1^2)}{nM_\omega(X_1)^2 + \lambda^2}\, dP(\omega)$$

dacă $P\{\mu(\omega) = 0\} = 1$.

D e m o n s t r a ţ i e. Considerăm mai întîi $\lambda < 0$ şi conform cu (1.1) scriem

$$P\{X_1 + X_2 + \ldots + X_n \leqslant \lambda\} = \int_\Omega P_\omega\{X_1 + X_2 + \ldots + X_n \leqslant \lambda\}\, dP(\omega). \quad (2.28)$$

În ipoteza $P\{\mu(\omega) = 0\} = 1$ putem aplica inegalitatea lui Cantelli şi obţinem:

$$P_\omega\{X_1 + X_2 + \ldots + X_n \leqslant \lambda\} \leqslant \frac{nM\ (X_1^2)}{nM_\omega(X_1^2) + \lambda^2} \quad (2.29)$$

Relaţia (2.29) s-a obţinut ţinînd cont că variabilele X_n au fost considerate independente şi identic repartizate cu funcţia de repartiţie comună $G_\omega(x)$.

Din (2.28) şi (2.29) obţinem

$$P\{X_1 + X_2 + \ldots + X_n \leqslant \lambda\} \leqslant \int_\Omega \frac{nM_\omega(X_1^2)}{nM_\omega(X_1^2) + \lambda^2}\, dP(\omega)$$

Cazul $\lambda \geqslant 0$ se demonstrează în acelaşi mod.

Vom da acum o extindere a inegalităţii lui Z. Birnbaum, J. Raymond şi H. Zuckerman (vezi [2]), în cazul variabilelor aleatoare simetric dependente, care se demonstrează în mod asemănător cu inegalitatea de tip Cantelli.

T e o r e m a 2.11. Fie $\{X_n; n \geqslant 1\}$ un şir de variabile aleatoare simetric dependente cu media zero care admit momente de ordinul al doilea finite. Atunci dacă $P\{\mu(\omega) = 0\} = 1$ avem:
pentru n număr par

$$P\left\{\sum_{i=1}^{n} X_i^2 \geqslant \lambda^2\right\} \leqslant$$

$$\leqslant \begin{cases} 1 \text{ pentru } \lambda^2 \leqslant nM_\omega(X_1^2), \\ \displaystyle\int_\Omega \frac{nM_\omega(X_1^2)}{2\lambda^2 - nM_\omega(X_1^2)}\, dP(\omega) \text{ pentru} \\ nM_\omega(X_1^2) \leqslant \lambda^2 \leqslant \dfrac{nM_\omega(X_1^2)}{4}(3 + \sqrt{5}), \\ \displaystyle\int_\Omega \frac{nM_\omega(X_1^2)}{\lambda^2}\left[1 - \frac{nM_\omega(X_1^2)}{4\lambda^2}\right] dP(\omega) \text{ pentru} \\ \dfrac{nM_\omega(X_1^2)}{4}(3 + \sqrt{5}) \leqslant \lambda^2 \end{cases}$$

iar pentru n număr impar

$$P\left\{\sum_{i=1}^{n} X_i^2 \geqslant \lambda^2\right\} \leqslant$$

$$\leqslant \begin{cases} 1 \text{ pentru } \lambda^2 \leqslant nM_\omega(X_1^2), \\ \int_\Omega \frac{(n+1)\, M_\omega(X_1^2)}{2\lambda^2 - (n-1)\, M(X_1^2)}\, dP(\omega) \text{ pentru} \\ nM_\omega(X_1^2) \leqslant \lambda^2 \leqslant \frac{M_\omega(X_1^2)}{4}\,(3n+1+\sqrt{5n^2+6n+5}), \\ \frac{nM_\omega(X_1^2)}{2} - \frac{(n^2-1)}{4\lambda^4}\int_\Omega M_\omega^2(X_1^2)\, dP(\omega) \text{ pentru} \\ \frac{1}{4}\, M_\omega(X_1^2)\,(3n+1+\sqrt{5n^2+6n+5}) \leqslant \lambda^2 \end{cases}$$

O b s e r v a ţ i a 2.4. Fie $\{X_n; n \geqslant 1\}$ un şir de variabile aleatoare simetric dependente cu media zero şi dispersia unu. Se arată simplu că dacă

$$P\{\mu(\omega) = 0,\ \sigma(\omega) = 1\} = 1$$

inegalitatea lui Cantelli şi inegalitatea lui Z. Birnbaum, J. Raymond şi H. Zuckerman au loc în aceiaşi formă ca şi la independenţă.

BIBLIOGRAFIE

[1] S i m e o n M. B e r m a n: *An extension of the arc sine law*, Ann. Math. Stat. vol. 33, 2 (1962), 681—684.

[2] Z. B i r n b a u m, J. R a y m o n d, H. Z u c k e r m a n: *A generalization of Tschebyshev's inequality of two dimension*, Ann. Math. Stat. vol. 18 (1947), 70—79.

[3] J. R. B l u m, H. C h e r n o f f, M. R o s e n b l a t t, H. T e i c h e r: *Central limit theorems for interchangeable processes*, Canadian Journal of Mathematics vol. 10, 2 (1958), 222—229.

[4] F. P. C a n t e l l i: *Sul confini della probabilita*, Atti. Congr. Internaz.Matemat. 6 (1928), 47—59.

[5] B r u n o d e F i n e t t i: *La prevision: ses lois logiques, ses sources subjectives*, Annales de l'Institut Henri Poincaré 7, (1937), 1—68.

[6] M. I o s i f e s c u, G. M i h o c, R. T h e o d o r e s c u: *Teoria probabilităţilor şi statistica matematică*, Editura Tehnică Bucureşti 1966.

[7] M. K a ç: *Toplitz matrices, translations kernels and a related problem in probability*, Duke Math. Journal vol. 21, 3, (1954), 501—509.

[8] D. G. K e n d a l l: *On finite and infinite sequences of exchangeable events*, Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica 2, (1967), 319—327.

[9] Paul Lévy: *Sur certaines processus stochastiques homogenes*, Compositio Math. vol. 7, (1939), 283—339.

[10] M. Loève: *Probability Theory*, (ed. a III-a), Princeton, 1963.

[11] Marczinckiewicz şi Zygmund: *Sur les fonctions independentes*, Fundamenta Matematika, 29, (1937), 169—185.

[12] G. S. Mudholkar, Poduri S. R. S Rao: *Some Sharp multivariate Tchebycheff inequalities*, Ann. Math. Stat. vol. 38, 2, (1967), 393—400.

[13] Octavian Popescu: *Asupra unei inegalităţi de tip Kolmogorov*, St. Cerc. Mat. Tom. 21, Nr. 7, (1969), 1099—1105.

(14) и. р. савидж: *Вероятностные неравенства Чебышевского типа*, Математика, 6,4 (1962) Москва.

INEQUALITIES FOR SEQUENCES OF SYMMETRIC DEPENDENT RANDOM VARIABLES

Abstract

This paper deals with some properties of sequences of symmetric dependent random variables, regarding some inequalities for sums of random variables.

On extend certain results true for sequences of independent and identically distributed random variables to the more general case of sequences of symmetric dependent random variables.

Received on 22.XII.1971 Academia de Studii Economice Bucureşti

ON SOME IMPORTANT RELATIONS BETWEEN THE ELASTIC COEFFICIENTS

L. M. SAHA

By direct calculation 15 pair of relations amongst the elastic coefficients in cylindrical coordinates as well as the spherical polar coordinates are deduced. The relations obtained are further simplified by using the notion of physical components of tensors.

Introduction: The constitutive equations (i.e. the stress-strain relations) for the general aeolotropic body in orthogonal Cartesian coordinates have been written by the generalisation of Hooke's law Love [1]. In this equation the elastic coefficients $C^{ij}_{k\lambda}$ which are constants in orthogonal Cartesian coordinates, are 21 in number as in this case

$$C^{ij}_{k\lambda} = C^{k\lambda}_{ij} \tag{1}$$

But in case of curvilinear coordinates the relations of this type are not valid. So the constitutive equations contain 36 elastic coefficients (not constants) in this case Green, Zerna [2]. But the physical nature of a body does not depend, on any way, in the choice of coordinate system. So naturally these 36 elastic coefficients should have 15 relations between them. But, the discussion of this point has never been seen in the literature.

The object of this note is to find out the said 15 relations in cylindrical and spherical polar coordinates by direct calculation according to the rules of tensor analysis and to prove mathematically the fact suggested by physical intution.

Cylindrical coordinates (ρ, θ, Z):

Let C^{mn}_{rs} and $\bar{C}^{ij}_{k\lambda}$ are respectively the elastic coefficients in Cartesian and cylindrical system of coordinates. Then by direct calculations, and from relation (1) we get the expressions for $\bar{C}^{ij}_{k\lambda}$ in terms of C^{mn}_{rs} as

$$\bar{C}^{11}_{22} = \rho^2[(C^{11}_{11} + C^{22}_{22} - 4\,C^{12}_{12}]\,\sin^2\theta\cos^2\theta + C^{11}_{22}\,(\sin^4\theta + \cos^4\theta) + \\ + 2(C^{11}_{12} - C^{22}_{12})\,(\sin^2\theta - \cos^2\theta)\,\sin\theta\cos\theta]$$

$$\bar{C}^{22}_{11} = \frac{1}{\rho^2}\,[(C^{11}_{11} + C^{22}_{22} - 4\,C^{12}_{12})\,\sin^2\theta\cos^2\theta + C^{11}_{22}(\sin^4\theta + \cos^4\theta) + \\ + 2(C^{11}_{12} - C^{22}_{12})\,(\sin^2\theta - \cos^2\theta)\,\sin\theta\cos\theta] \tag{2}$$

By direct comparison of the above relations, one gets

$$\frac{1}{\rho^2}\bar{C}^{11}_{22} = \rho^2 \bar{C}^{22}_{11} \tag{3}$$

Similarly, other cases may be calculated directly, more easily and in place of the relation (1), one gets

$$\bar{C}^{11}_{33} = \bar{C}^{33}_{11},\ \rho^2\bar{C}^{22}_{33} = \frac{1}{\rho^2}\bar{C}^{33}_{22},\ \frac{1}{\rho}\bar{C}^{11}_{12} = \rho\,\bar{C}^{12}_{11},\ \frac{1}{\rho}\bar{C}^{11}_{23} = \rho\,\bar{G}^{23}_{11},$$

$$\bar{C}^{11}_{13} = \bar{C}^{13}_{11},\ \rho\,\bar{C}^{22}_{12} = \frac{1}{\rho}\bar{C}^{12}_{22},\ \rho\,\bar{C}^{22}_{23} = \frac{1}{\rho}\bar{C}^{23}_{22},\ \rho^2\bar{C}^{22}_{13} = \frac{1}{\rho^2}\bar{C}^{13}_{22},$$

$$\frac{1}{\rho}\bar{C}^{33}_{12} = \rho\,\bar{C}^{12}_{33},\ \frac{1}{\rho}\bar{C}^{33}_{23} = \rho\,\bar{C}^{23}_{33},\ \bar{C}^{33}_{13} = \bar{C}^{13}_{33},\ \rho\,\bar{C}^{12}_{13} = \frac{1}{\rho}\bar{C}^{13}_{12}, \tag{4}$$

$$\bar{C}^{12}_{23} = \bar{C}^{23}_{12},\ \frac{1}{\rho}\bar{C}^{13}_{23} = \rho\,\bar{C}^{23}_{13}.$$

So the independent elastic coefficients will be 21 due to these relations. Now, introducing the notion of physical components of tensor, McConnell [3], one can also write these relations in the form of (1).

Spherical polar coordinates (γ, θ, Φ):

Let $E^{ij}_{k\lambda}$ be the elastic coefficients in spherical polar coordinates. Then similarly by direct calculation and from the relation (1) we can establish their relations with those of $C^{mn}_{\gamma s}$ in Cartesian system and get

$$\begin{aligned} E^{11}_{33} = \gamma^2 \sin^2\theta\, [&C^{11}_{33}(\sin^4\Phi + \cos^4\Phi)\sin^2\theta + (C^{11}_{11} + C^{22}_{22} - \\ &- 4C^{12}_{12})\sin^2\theta\cos^2\Phi\sin^2\Phi + (C^{11}_{33}\sin^2\Phi + C^{22}_{33}\cos^2\Phi)\cos^2\theta + \\ &+ 2(C^{11}_{12} - C^{22}_{12})(\sin^2\Phi - \cos^2\Phi)\sin^2\theta\sin\Phi\cos\Phi + \\ &+ 2(C^{11}_{13} - 2C^{23}_{12})\sin^2\Phi\cos\Phi\sin\theta\cos\theta + 2(C^{22}_{23} - \\ &- 2C^{13}_{12})\cos^2\Phi\sin\Phi\sin\theta\cos\theta + 2(C^{11}_{23}\sin^3\Phi + \\ &+ C^{22}_{13}\cos^3\Phi)\sin\theta\cos\theta - 2C^{33}_{12}\cos^2\theta\sin\Phi\cos\Phi] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E^{33}_{11} = \frac{1}{\gamma^2\sin^2\theta}[&C^{11}_{22}(\sin^4\Phi + \cos^4\Phi)\sin^2\theta + (C^{11}_{11} + C^{22}_{22} - \\ &- 4C^{12}_{12})\sin^2\theta\cos^2\Phi\sin^2\Phi + (C^{11}_{33}\sin^2\Phi + C^{22}_{33}\cos^2\Phi)\cos^2\theta + \\ &+ 2(C^{11}_{12} - C^{22}_{12})(\sin^2\Phi - \cos^2\Phi)\sin^2\theta\sin\Phi\cos\Phi + 2(C^{11}_{13} - \\ &- 2C^{23}_{12})\sin^2\Phi\cos\Phi\sin\theta\cos\theta + 2(C^{22}_{23} - 2C^{13}_{12})\cos^2\Phi\sin\Phi\sin\theta\cos\theta + \\ &+ 2(C^{11}_{23}\sin^3\Phi + C^{22}_{13}\cos^3\Phi)\sin\theta\cos\theta - 2C^{33}_{12}\cos^2\theta\sin\Phi\cos\Phi] \end{aligned} \tag{5}$$

By direct comparison of the above relations, we get

$$\frac{1}{\gamma^2\sin^2\theta}E^{11}_{33} = \gamma^2\sin^2\theta\cdot E^{33}_{11} \tag{6}$$

In the same way, for other cases the relations existing are

$$\frac{1}{\gamma^2} E^{11}_{22} = \gamma^2 E^{22}_{11}, \frac{1}{\sin^2\theta} E^{22}_{33} = \sin^2\theta\, E^{33}_{22}, \frac{1}{\gamma} E^{11}_{12} = \gamma E^{12}_{11},$$

$$\frac{1}{\gamma^2 \sin\theta} E^{11}_{23} = \gamma^2 \sin\theta\, E^{23}_{11}, \frac{1}{\gamma \sin\theta} E^{11}_{13} = \gamma \sin\theta\, E^{13}_{11}, \gamma E^{22}_{12} =$$

$$= \frac{1}{\gamma} E^{12}_{22}, \frac{1}{\sin\theta} E^{22}_{23} = \sin\theta\, E^{23}_{22}, \frac{\gamma}{\sin\theta} E^{22}_{13} = \frac{\sin\theta}{\gamma} E^{13}_{22}, \gamma \sin^2\theta\, E^{33}_{12} =$$

$$= \frac{1}{\gamma \sin^2\theta} E^{12}_{33}, \sin\theta\, E^{33}_{23} = \frac{1}{\sin\theta} E^{23}_{33}, \gamma \sin\theta\, E^{33}_{13} = \frac{1}{\gamma \sin\theta} E^{13}_{33}, \tag{7}$$

$$\frac{1}{\sin\theta} E^{12}_{13} = \sin\theta\, E^{13}_{12}, \frac{1}{\gamma \sin\theta} E^{12}_{23} = \gamma \sin\theta\, E^{23}_{12}, \frac{1}{\gamma} E^{13}_{23} = \gamma E^{23}_{13}.$$

So again in this case also, the independent elastic coefficients will be 21 due to these relations. Now introducing the notion of physical components of tensor, (McConnell 1957) one can also write these relations in the form (1).

Conclusion:

It is really interesting to note that for the elastic coefficients in cylindrical and spherical polar coordinates there is a set of the relations, quite similar to that for Cartesian coordinates. Naturally, the question whether some similar relations are valid for more general class of coordinates system or not appears to be important. This point is taken in a different investigation (Dutta, Saha, [4].

It is also to be noted that relations of the type obtained here are not only of specific interest for the theory of elasticity or of mechanics of continuous media but also of general interest to the theory of tensors and its applications at large. So, this point is to be investigated for general interese.

Acknowledgement:

My thanks are due to Dr. M. Dutta for his help and valuable guidance and to Sri P. K. Ghosh for some valuable discussions and encouragement.

REFERENCES

1. Love, A. E. H. (1959): *Mathematical Theory of Elasticity*. Cambridge University Press.
2. Green, A. E. and Zerna, W. (1960): *Theoretical Elasticity. Oxford University Press*, 1960. pp. 155—162.
3. Mc Connell, A. J. (1957): *Application of Tensor Analysis*. Dover Publications Inc. pp. 303—305.
4. Dutta, M. and Saha, L. M. (1971): *On the Number of Elastic Coefficients of General Aeolotropic Bodies*. (Communicated).

Received on 15.X.1971

University College of Science, Calcutta, Centre of Advanced Study in Applied Mathematics

ASUPRA UNEI TEOREME A LUI V. VÂLCOVICI

M. STAN

V. Vâlcovici [1] a generalizat teorema momentului cinetic corespunzătoare unui sistem de puncte materiale.

Astfel a considerat micşorarea sistemului de puncte materiale în raport cu două triedre de referinţă mobile, avînd mişcări oarecari şi a găsit condiţiile la care trebuie supusă mişcarea unui triedru, relativ la celălalt pentru ca teoremele universale ale mecanicii să se păstreze sub forma clasică cunoscută.

În cele ce urmează, vom considera aceeaşi problemă, admiţînd că vitezele sistemului au un număr finit de discontinuităţi de prima speţă.

Fie T_1 şi T_2 cele două triedre de referinţă în mişcare unul faţă de altul, iar (S) un sistem de puncte în mişcare faţă de cele două triedre.

Vom nota:

P — un punct material, de masă m, aparţinînd sistemului (S);

$\vec{r}$ — vectorul de poziţie a originii triedrului T_2 faţă de T_1;

$\vec{r}_j$ — $(j = 1, 2)$ — vectorul de poziţie al punctului P faţă de T_j;

$\vec{v}_j$ — vectorul viteză al punctului P faţă de T_j;

$\vec{V}$ — vectorul viteză al punctului P considerat solidar legat cu T_2 faţă de T_1;

M — scalarul ce defineşte masa sistemului (S) prin

$$M = \sum_{P \in (S)} m;$$

$\vec{\omega}$ — vectorul viteză instantanee de rotaţie al triedrului T_2 în raport cu T_1;

$\vec{\rho}_2$ — vectorul de poziţie al centrului maselor m, faţă de T_2, definit prin relaţia $\vec{\rho}_2 = \dfrac{\sum_{P \in (S)} m\vec{r}_2}{\sum_{P \in (S)} m}$

$\vec{F}$, $\vec{F}^i$ — rezultanta forţeîlor exterioare, respective interioare care acţionează asupra punctului P, torsorul forţelor interioare aplicat sistemului material (S) e nul. Cu ajutorul notaţiilor făcute putem scrie:

$$\vec{r}_1 = \vec{r} + \vec{r}_2$$
$$\vec{v}_1 = \vec{v} + \vec{v}_2, \text{ unde}$$
$$\vec{v} = \vec{r} + \vec{\omega} \, x \, \vec{r}$$

Deci vom avea:

$$\vec{v}_1 = \vec{r} + \vec{\omega} \, x \, r + \vec{v}_2. \tag{1}$$

Presupunem de asemenea că $\dot{\vec{r}}$, $\vec{\omega}$, $\vec{v}_2$, admit un număr finit de discontinuităţi de prima speţă.

Notăm cu $\frac{d}{dt}$ derivate în sensul distribuţiilor şi cu $\frac{d}{dt}$ derivata obişnuită în raport cu timpul.

În sensul teoriei distribuţiilor se introduc:

a) forţa generalizată $\vec{F}(t) = \tilde{\vec{F}}(t) + \vec{F}(t)$, unde $\tilde{\vec{F}}_c(t)$ e forţa în sens obişnuit $\tilde{\vec{F}}(t) = m\tilde{\vec{a}}(t)$, $\tilde{\vec{a}}(t)$, fiind acceleraţia definită în mod obişnuit, iar $\vec{F}_c(t)$ fiind forţa complementară definită $\vec{F}_c(t) = m\vec{a}_c(t)$, unde $\vec{a}_c(t) = \sum_\alpha (v_\alpha) \, \delta(t - t_\alpha)$.

$(\vec{V})$ reprezentînd saltul vitezei la momentul t_α(α parcurgînd un număr finit), iar $\delta(t-t_\alpha)$ fiind distribuţia lui Dirac.

b) impulsul unui punct material prin $\vec{H}(t) = m\vec{v}(t)$ care e o funcţie continuă cu un număr finit de discontinuităţi de speţa I.

c) momentul cinetic al unui punct material prin:

$$\vec{K}(t) = \vec{r}(t) \, x\vec{H}(t) = \vec{r}(t) \, x[m\vec{v}(t)]$$

În sensul teoriei distribuţiilor teorema impulsului şi teorema momentului cinetic se scriu sub forma 2:

$$\frac{d\vec{H}(t)}{dt} = \vec{F}(t) = \tilde{\vec{F}}(t) + \tilde{\vec{F}}_c(t) \tag{2}$$

$$\frac{d\vec{K}(t)}{dt} = M \cdot \tilde{\vec{F}}(t) + M \cdot \vec{F}_c(t) \tag{3}$$

Extindem definiţia la întregul sistem (S) şi obţinem impulsul şi momentul cinetic al sistemului faţă de triedrul T_j, notate respectiv cu $H_j, K_j (j = 1, 2)$;

$$\vec{H}_j = \sum_{P \in (S)} m\vec{v}_j(t) \tag{4}$$

$$\vec{K}_j = \sum_{P \in (S)} \vec{r}_j, \, x(m \cdot \vec{v}_j) \tag{5}$$

Atunci teorema impulsului și teorema momentului cinetic devin:

$$\frac{d\vec{H}_j}{dt} = \sum_{P\in(S)} \vec{F} \tag{4'}$$

$$\frac{d\vec{K}_j}{dt} = \sum_{P\in(S)} \vec{r}_j x\vec{F} \tag{5'}$$

În expresia momentului cinetic (5) pentru $j = 1$, înlocuind $\vec{V}_1$ și $\vec{r}_1$ cu valorile lor se găsește pentru $\vec{K}_1$ următoarea reprezentare:

$$\vec{K}_1 = \vec{K}_2 + M\vec{r}x\dot{\vec{r}} + M\vec{r}x\dot{\vec{\rho}}_2 + M\vec{\rho}_2 x\dot{\vec{r}} + \sum_{P\in(S)} m\vec{r}_2 x(\vec{\omega}\times\vec{r}_2) \tag{6}$$

Derivăm în raport cu timpul relația (6) în sensul teoriei, distribuțiilor, căpătăm:

$$\frac{d\vec{K}_1}{dt} = \frac{d\vec{K}_2}{dt} + M\vec{r}\times\dot{\vec{\rho}}_2 + M\vec{\rho}_2\times\ddot{\vec{r}}^2 + \frac{d}{dt}\Big[\sum_{P\in(S)} m\vec{r}_2\times(\vec{\omega}\times\vec{r}_2)\Big] \tag{7}$$

căci:

$$M\dot{\vec{r}}\times\dot{\vec{\rho}}_2 + M\vec{\rho}_2\times\dot{\vec{r}} = 0$$

iar pentru $\ddot{\vec{\rho}}_2$ vom avea:

$$\ddot{\vec{\rho}}_2 = \frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\sum\limits_{P\in(S)} m\vec{r}_2}{\sum\limits_{P\in(S)} m}\right) = \frac{\tilde{d}^2}{dt^2}\left(\frac{\sum\limits_{P\in(S)} m\vec{r}_2}{\sum\limits_{P\in(S)} m}\right) +$$

$$+ \frac{\sum\limits_{P\in(S)} m\,[\sum\limits_{\beta} (r_2)_\beta\,\delta(t-t_\beta)]}{\sum\limits_{P\in(S)} m} = \ddot{\vec{\rho}}_2 + \vec{\rho}_{c2} \tag{7'}$$

În continuare ne propunem să stabilim relația:

$$\sum_{P\in(S)} \vec{r}_1\times\vec{F} = \vec{r}\times M\ddot{\vec{\rho}}_2 + \sum_{P\in(S)} \vec{\rho}_2\times\vec{F} \tag{8}$$

În sensul teoriei distribuțiilor.

Într-adevăr avem succesiv:

$$\sum_{P\in(S)} \vec{r}_1 x\vec{F} = \sum_{P\in(S)} (\vec{r}_1 + \vec{r}_2)\times\vec{F} = \sum_{P\in(S)} \vec{r}x\vec{F} + \sum_{P\in(\beta)} \vec{r}_2 x\vec{F} = \sum_{P\in(S)} \vec{r}xm\ddot{\vec{r}} +$$

$$+ \sum_{P\in(S)} \vec{r}_2 x\vec{F} = \vec{r}M\ddot{\vec{\rho}}_2 + \sum_{P\in(S)} \vec{r}_2\times\vec{F} = \vec{r}\times M\ddot{\vec{\rho}}_2 + \sum_{P\in(S)} \vec{r}_2\times\vec{F}$$

unde $\ddot{\vec{\rho}}_2$ are expresia (7').

Din teorema momentului cinetic și relațiile (7) și (8) găsim:

$$\sum_{P\in(S)} \vec{r}_2 x\vec{F} = \frac{d\vec{K}_2}{dt} + M\vec{\rho}_2 \times \ddot{\vec{r}} + \frac{d}{dt}\left[\sum_{P\in(S)} m\vec{r}_2 \times (\omega \times \vec{r}_2)\right] \tag{9}$$

care nu este altceva decît formula ce generalizează teorema momentului cinetic stabilită de V. Vâlcovici.

Trebuie atrasă atenția că teoria mărimile de mai sus sînt privite în sensul teoriei distribuțiilor.

Se observă că dacă $\vec{\omega} = 0$, din triedrul T_2 nu prezintă decît viteza de translație cu discontinuități se obține o teoremă care generalizează teorema clasică a momentului cinetic.

În cazul în care și $\vec{\rho}_2 = 0$, teorema clasică a momentului cinetic (formula (4)) își menține forma.

BIBLIOGRAFIE

1. V. Vâlcovici — *„Opere"* vol. I, Editura Academiei, 1969, pp. 21—23.
2. W. Kecs.- P. P. Teodorescu — *Aplicații ale teoriei distribuțiilor în mecanică"*, Editura Academiei — 1970, pp. 181—192.

ON A THEOREM OF V. VÂLCOVICI

Abstract

A generalization in distributions of a theorem of V. Vâlcovici [1] concerning an extension.

ON THE STABILITY OF A CLASS OF PLASMA FLOWS WITH HELICAL FLOW AND FIELD LINES

E. R. SURYANARAYAN, J. I. SALISBURY

The stability of a class of flows with helical flow and field lines are investigated. It is found that there exists a subclass of these flows that are stable.

1. *Introduction.* Trehan [1] has examined the stability of system in which an infinitely conducting uniform plasma is contained in an infinitely long cylinder, in which the magnetic field H^j and the velocity u^j are parallel locally and are related in the form

$$u^j = \alpha H^j = \alpha H \left(0, \frac{\overline{\omega}}{p}, 1\right)$$

(here $(\overline{\omega}, \Phi, z)$ denotes a system of cylindrical coordinates and H and α are constants; $2\pi p$ is the pitch of the helices formed by the flow and field lines), and has shown that the system is stable if $\alpha > 1$; that is, the system is stable if the energy of the magnetic field does not exceed the energy of the velocity field. Chandrasekhar [1] has discussed this problem of stability in detail.

This problem can be generalized considerably, from the parallel case to the case where the flow and the field lines are helices, but H^j and u^j are not necessarily parallel. For this, we shall consider in this paper, the stability of flows for which the flow and field vectors are respectively of the form

$$u^j = \beta A \left(0, \alpha \frac{\overline{\omega}}{p}, 1\right), \quad H^j = A \left(0, \frac{\overline{\omega}}{p}, 1\right)$$

(where α, β, A are arbitrary constants), and show that the system is stable if $|\alpha\beta| > 1$; that is, the system is stable, if the energy of the magnetic field along the Φ direction does not exceed the energy of the velocity field along the Φ direction. In the above representation the stability problem of Trehan can be recovered if we set $\alpha = 1$.

Let $x^j (j = 1, 2, 3)$ denote the variables of a system of Cartesian orthogonal coordinates. In order to use the summation we shall write the indices in covariant and contravariant positions. Following Chandrasek-

har [1], the equations of motion and continuity and the Maxwell relations governing the flow of an inviscid, incompressible fluid are taken to be

$$\frac{\partial Y_k}{\partial t} - X^j \frac{\partial Y_k}{\partial x^j} = -\frac{\partial \Pi}{\partial x^k} \tag{1}$$

$$\frac{\partial X_k}{\partial t} + Y^j \frac{\partial X_k}{\partial x^j} = +\frac{\partial \Pi}{\partial x} \tag{2}$$

$$\frac{\partial X^j}{\partial x^j} = 0 \tag{3}$$

$$\frac{\partial Y^j}{\partial x^j} = 0 \tag{4}$$

where

$$X_j = H_j - u_j. \quad Y_j = H_j + u_j$$

$$\Pi = \Omega + \Pi^* + \frac{1}{2} H^2$$

Π is the total pressure, Ω is the force potential, Π^* is the fluid pressure.

Let ξ_j η_j and P denote the first order perturbations of X_j, Y_j and Π respectively. The equations governing the perturbations, by virtue of (1) — (4), are

$$\frac{\partial \xi_k}{\partial t} + Y^j \frac{\partial \xi_k}{\partial x^j} + \eta^j \frac{\partial X_k}{\partial x^j} = \frac{\partial P}{\partial x^j} \tag{5}$$

$$\frac{\partial \eta_k}{\partial t} - X^j \frac{\partial \eta_k}{\partial x^j} - \xi^j \frac{\partial Y_k}{\partial x^j} = -\frac{\partial P}{\partial x^j} \tag{6}$$

$$\frac{\partial \xi^j}{\partial x^j} = 0 \tag{7}$$

$$\frac{\partial \eta^j}{\partial x^j} = 0 \tag{8}$$

2. *Stability of a class of helical solutions.* The equations (1) — (4) admit a stationary solution

$$u^j = \beta A \left(0, \ \alpha \frac{\bar{\omega}}{p}, \ 1\right) \tag{9}$$

$$H^j = A \left(0, \frac{\bar{\omega}}{p}; 1\right) \tag{10}$$

$$\Pi = \text{constant} - \frac{A^2 \bar{\omega}^2}{2} (\beta^2 \alpha^2 - 1) \tag{11}$$

From (9) and (10) it is clear that the flied and the flow lines are circular helices of pitches $2\pi p$ and $2\pi(p|\alpha)$ respectively. We shall assume that the fluid is

confined in a cylinder of radius R. Assuming that the perturbations are of the form

$$f(\bar{\omega}) \exp i\,(\sigma t + m\Phi + kz) \tag{12}$$

we analyze the disturbance. First we note that

$$Y_k = \left(0,\ A\,\frac{\bar{\omega}}{p}\,(1+\alpha\beta),\ A(1+\beta)\right) \tag{13}$$

$$X_k = \left(0,\ A\,\frac{\bar{\omega}}{p}\,(1-\alpha\beta),\ A(1-\beta)\right) \tag{14}$$

Substituting for X_k and Y_k from (13) and (14) into (5)—(8), the equations (5) — (8) reduce to

$$i\omega_1\xi_{\bar{\omega}} - \alpha_1\xi_\Phi - \alpha_2\eta_\Phi = DP \tag{15}$$

$$i\omega_1\xi_\Phi + \alpha_1\xi_{\bar{\omega}} + \alpha_2\,\eta_{\bar{\omega}} = \frac{i}{\bar{\omega}}mP \tag{16}$$

$$i\omega_2\eta_{\bar{\omega}} + \alpha_2\eta_\Phi + \alpha_1\xi_\Phi = -\,DP \tag{17}$$

$$i\omega_2\eta_\Phi - \alpha_2\eta_{\bar{\omega}} - \alpha_1\xi_{\bar{\omega}} = -\,\frac{i}{\bar{\omega}}\,mP \tag{18}$$

$$\omega_1\xi_z = kP\ \ \omega_2\eta_z = -\,kP \tag{19}$$

where

$$\alpha_1 = \frac{A}{p}\,(1+\alpha\beta),\ \alpha_2 = \frac{A}{p}\,(1-\alpha\beta),\ D = \frac{d}{d\bar{\omega}} \tag{20}$$

and

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \sigma + \frac{Am}{p}\,(1+\alpha\beta) + Ak(1+\beta) \\ \omega_2 &= \sigma - \frac{Am}{p}\,(1-\alpha\beta) - Ak(1-\beta) \end{aligned} \tag{21}$$

Using (15) — (19) we solve for $\xi_{\bar{\omega}}$ and ξ_Φ to obtain

$$[\omega_1^2\omega_2^2 - (\alpha_2\,\omega_1 - \alpha_1\,\omega_2)^2]\ \xi_{\bar{\omega}} = +\,i\omega_2\left[-\,\omega_1\omega_2\,DP + (\alpha_2\omega_1 - \alpha_1\omega_2)\,\frac{mP}{\bar{\omega}}\right] \tag{22}$$

$$[\omega_1^2\omega_2^2 - (\alpha_2\omega_1 - \alpha_1\omega_2)^2]\ \xi_\Phi = -\,\omega_2\left[(\alpha_2\omega_1 - \alpha_1\omega_2)\,DP - \omega_1\omega_2\,\frac{mP}{\bar{\omega}}\right] \tag{23}$$

Since ξ^j is solenoidal, we have

$$D^*\xi_\omega + \frac{im}{\omega}\,\xi_\Phi + ik\xi_z = 0 \tag{24}$$

where

$$D^* = D + \frac{1}{\bar{\omega}}\,.$$

Substituting for $\xi_{\overline{\omega}}$, ξ_{Φ}, ξ_z from (22), (23) and the first equation of (19) we find that

$$D^*DP + \left\{k^2\left[\left(\frac{\alpha_2\omega_1 - \alpha_1\omega_2}{\omega_1\omega_2}\right)^2 - 1\right] - \frac{m^2}{\overline{\omega}^2}\right\} P = 0 \tag{25}$$

The solution of this equation which is free of singularity at the origin is

$$P(\overline{\omega}) = CJ_m(\lambda\overline{\omega}) \tag{26}$$

where J_m is the Bessel's function of order m; C is an arbitrary constant and

$$\lambda^2 = k^2\left[\left(\frac{\alpha_2\omega_1 - \alpha_1\omega_2}{\omega_1\omega_2}\right)^2 - 1\right] \tag{27}$$

We shall suppose that the boundary conditions require the vanishing of P at $\overline{\omega} = R$. Then

$$\lambda R = x_{m,j} \tag{28}$$

where $x_{m,j}$ is the jth zero of $J_m(x)$. From (27) and (28) it follows that

$$\omega_1\omega_2 = q(\alpha_2\omega_1 - \alpha_1\omega_2) \tag{29}$$

where

$$q = \pm\, x(x^2 + x^2_{m,j})^{-(1/2)} \tag{30}$$

Substituting for ω_1, ω_2, α_1, α_2 from (20) and (21) into (29), the relation (29) becomes after some rearrangement

$$\sigma^2 + 2A\left(\frac{m\alpha}{p} + k + \frac{\alpha q}{p}\right)\sigma - \frac{A^2m^2}{p^2}\alpha^2\beta^2(-1) + \frac{A^2mk}{p}(\beta^2 - 1) + A^2k^2(\beta^2 - 1) -$$
$$- \frac{2A^2q}{p}\left[\frac{m}{p} + k(1 - \alpha\beta^2) - \frac{\alpha^2\beta^2 m}{p}\right] = 0 \tag{31}$$

Now solving the above quadratic equation for σ we get

$$\sigma = -A\beta\left(\frac{m\alpha}{p} + \frac{q\alpha}{p} + k\right) \pm A\left[\left(\frac{m}{p} + \frac{q}{p} + k\right)^2 + (\alpha^2\beta^2 - 1)\frac{q^2}{p^2}\right]^{1/2}$$

and the discriminant of the equation (31) is given by

$$\Delta = A\left[\left(\frac{m}{p} + \frac{q}{p} + k\right)^2 + (\alpha^2\beta^2 - 1)\frac{q^2}{p^2}\right] \tag{33}$$

From the relation (33) we see that if $|\alpha\beta| < 1$, then we can always find values k and m for which Δ is negative and the system is unstable. On the other hand, $\Delta < 0$ cannot be met if $|\alpha\beta| \geqslant 1$. Accordingly, *the system is stable if* $|\alpha\beta| \geqslant 1$. From (30) we can associate with $\pm|q|$, there are in general, four distinct modes of oscillation, corresponding to the four roots of

σ which follow from (32). The condition $|\alpha\beta| \geqslant 1$ implies from (9) and (10) that the energy of u^j — along the Φ direction should be equal to are greater than the energy of H^j along the Φ direction. Therefore *the system is stable, if the energy of the magnetic field along the Φ direction does not exceed the energy of the velocity field along the Φ direction.*

REFERENCES

1] CHANDRASEKHAR, S. *Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability*, Clarendon Press, 1961, § 114.

Received on 20.VII.1971

University of Rhode Island, Ratheon Company, Rhode Island, U.S.A.

ASUPRA APLICĂRII METODEI LUI NEWTON – KANTOROVICI LA REZOLVAREA ECUAȚIILOR OPERAȚIONALE NELINIARE ÎN SPAȚII L – SUPERMETRICE

I. ȘICLOVAN

1. Spațiul liniar metric X se numește ([1], § 2.5) supermetric dacă distanța ρ satisface, pentru orice elemente $x_1, x_2, x_3 \in X$, condiția

$$\rho(x_1 + x_2, x_3) = \rho(x_1 - x_3, x_2). \tag{1.1}$$

Dacă se ia în (1.1) $x_1 = x_2 = \theta$, unde θ este elementul nul al spațiului X, se obține $\rho(\theta, x_3) = \rho(-x_3, \theta)$ de unde, în baza axiomei simetriei, rezultă $\rho(\theta, x_3) = \rho(-x_3, \theta)$, adică

$$\rho(-x, \theta) = \rho(x, \theta), \quad x \in X. \tag{1.2}$$

Într-un spațiu supermetric X, pentru $x_j \in X$, $j = 1, 2, 3, 4$, există proprietatea

$$\rho(x_1 + x_2, x_3 + x_4) \leqslant \rho(x_1, x_3) + \rho(x_2, x_4). \tag{1.3}$$

Distanța dintre elementul $x \in X$ și elementul nul $\theta \in X$ se numește [1] norma generalizată (în sensul lui Collatz) a elementului x și se notează [2]:

$$\rho_X(x) = \rho(x, \theta). \tag{1.4}$$

Norma introdusă verifică condițiile

$$\rho_X(x) = 0 \text{ dacă și numai dacă } x = \theta; \tag{1.5}$$

$$\rho_X(-x) = \rho_X(x) \text{ (rezultă din (1.2)} \tag{1.6}$$

$$\rho_X(x + y) \leqslant \rho_X(x) + \rho_X(y) \tag{1.7}$$

oricare ar fi x, y din spațiul supermetric X. Dacă în plus, normei generalizate i se impune condiția de omogenitate

$$\rho_X(cx) = |c|\rho_X(x), \quad c \text{ număr real},$$

atunci spațiul X devine spațiu normat.

Fie spațiile metrice X și Y și operatorul $P : D \to W$, $D \subset X$, $W \subset Y$. Operatorul P se zice mărginit dacă există un număr real $c > 0$ astfel încît

$$\sigma(Px_1, Px_2) \leqslant c\rho(x_1, x_2) \tag{1.8}$$

pentru $x_1, x_2 \in D$. Cel mai mic număr c pentru care este verificată (1.8) se numeşte ([1], § 6.1) constanta Lipschitz a operatorului P sau norma operatorului P şi se notează

$$\rho_{XY}(P) = \sup_{x_1, x_2 \in D} \frac{\sigma(Px_1, Px_2)}{\rho(x_1, x_2)} \tag{1.9}$$

unde σ şi ρ sînt distanţele în spaţiile Y şi X. În cazul cînd $\rho_{XY}(P) < 1$ operatorul P se numeşte strict contractiv iar dacă $\rho_{XY}(P) = 1$ neexpansiv. Pentru scopurile analizei numerice este important faptul că norma operatorului P se poate micşora considerînd restricţia acestui operator la un domeniu $D' \subset D$.

Spaţiul supermetric X în care pentru fiecare element $h \in X$ există o funcţională liniară şi mărginită L astfel încît

$$\rho_{XR}(L) = 1 \text{ şi } Lh = \rho_X(h) \tag{1.10}$$

(unde cu R s-a notat mulţimea numerelor reale) se numeşte ([1]., § 16.5) spaţiu L- supermetric.

Într-un spaţiu L- supermetric X, există proprietatea

$$\rho_X(tx) \leqslant |t| \rho_X(x), \; t \in R. \tag{1.11}$$

Pentru demonstraţie vom presupune la început $t \geqslant 0$. Cum spaţiul X este L- supermetric există pentru elementul tx funcţionala liniară şi mărginită L astfel încît

$$\rho_{RX}(L) = 1 \text{ şi } L(tx) = \rho_X(tx).$$

Ţinînd seama de relaţiile precedente şi de proporţiile funcţionalei L, obţinem succesiv

$$\rho_X(tx) = Ltx = tLx = t|Lx| \leqslant t\rho_{XR}(L)\, \rho_X(x) = t\rho_X(x).$$

Deci afirmaţia este demonstrată pentru $t \geqslant 0$.

Schimbînd x cu $-x$ în relaţia $\rho_X(tx) \leqslant t\rho_X(x)$ se obţine, ţinîndu-se seama şi de relaţia (1.6),

$$\rho_X(-tx) \leqslant t\rho_X(-x) = t\rho_X(x).$$

Acest rezultat se mai scrie

$$\rho_X[(-t)x] \leqslant -(-t)\, \rho_X(x)$$

sau

$$\rho_X(\tau x) \leqslant -\tau\rho_X(x) = |\tau|\, \rho_X(x)$$

unde

$$\tau = -t > 0.$$

Fie spaţiile supermetrice X şi Y şi operatorul $P : D \to Y$, $D \subset X$. Se spune că operatorul P este diferenţiabil în sens Fréchet în punctul $x_0 \in D$

dacă există un operator liniar mărginit $H = P'_{x_0} : D \to Y$ şi o funcţie $\varepsilon(\delta)$ cu $\lim_{\delta \to 0} \varepsilon(\delta) = 0$ astfel încît

$$\sigma(P(x_0 + k) - Px_0,\ P'_{x_0}k) \leqslant \rho_X(K) \cdot \varepsilon(\rho_X(K) \tag{1.12}$$

în orice vecinătate $\rho(k,\ \theta) \leqslant k_0$([1], § 16.1). Operatorul P'_{x_0} se numeşte **derivata de ordinul întîi a operatorului** P în punctul x_0 şi $P'_{x_0} \in [X \to Y]$, **unde** prin $[X \to Y$ s-a notat, ca de obicei, mulţimea aplicaţiilor liniare din X **în** Y.

Norma operatorului liniar P'_{x_0} este

$$\rho_{XY}(P'_{x_0}) = \sup_{k \in D} \frac{\rho_y(P'_{x_0}k)}{\rho_X(k)} \tag{1.13}$$

Dacă derivata operatorului P există pentru orice $x \in X$ (sau $x \in D$), P'_x este un operator, în general neliniar, care aplică elementul spaţiului X în elementul spaţiului $[X \to Y$. Operatorul P'_x poate fi, la rîndul său, **diferenţiabil** în sens Fréchet.

Dacă pentru $x_0 \in D \subset X$ există un operator liniar $B_{x_0} \in [X \to [X \to Y]$ astfel încît

$$\sigma(P'_{x_0+k'} + k - P'_{x_0}k,\ B_{x_0}\, kk') \leqslant \rho_X(k') \cdot \varepsilon(\rho_X(k')) \tag{1.14}$$

în orice vecinătate $\rho_X(k') \leqslant k'_0$, operatorul $B_{x_0} = P''_{x_0}$ se numeşte **derivata a doua a operatorului** P în punctul x_0. El este un operator biliniar şi **norma** sa este

$$\rho_{X^2,\ Y}(P''_{x_0}) = \sup_{k,\ k' \in D} \frac{\rho_Y(P''_{x_0}\, kk')}{\rho_X(k)\, \rho_X(k')} \tag{1.15}$$

Analog se introduce noţiunea de derivată de ordinul n a **operatorului** P.

Dacă în domeniul convex $D \subset X$, X spaţiu L — supermetric, **operatorul** $P : X \to Y$ este diferenţiabil Fréchet, atunci [3], Y fiind de acelaşi **timp cu** X, avem

$$\sup_{x,\ x+k \in D} \frac{\rho_Y(P(x + k) - Px}{\rho_X(k)} = \sup_{x \in D} \rho_{X,\ Y}(P'_x) \tag{1.16}$$

Într-adevăr, spaţiul Y fiind L — supermetric, există funcţionala **liniară** L cu proprietatea $\rho_{YR}(L) = 1$ şi $Lh = \rho_Y(h)$ pentru $h = P(x + k) - Px \in Y$. Fie funcţia reală

$$\varphi(t) = L[P(x + tk) - Px],\ t \in [0,\ 1]. \tag{1.17}$$

Derivînd funcţia (1.17) se obţine $\varphi'(t) = L\ [P'(x + tk)k]$ şi utilizînd **formula** lui Lagrange avem

$$\rho_Y[P(x + k) - Px] = |\varphi(t)| = |\varphi(1) - \varphi(0)| \leqslant \sup_{t \in [0,\ 1]} |\varphi'(t)| \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{t \in [0,1]} \cdot\ \rho_{X,\ Y}(P'_{x+tk}) \cdot \rho_X(k) \leqslant \sup_{x \in D} \rho_{X,Y}(P'_x) \cdot \rho_X(k).$$

de unde rezultă (1.17)

Collatz L. în ([1], § 16.6) a dat formula lui Taylor cu evaluarea restului

$$\rho\left[P(x_0+k),\ Px_0+\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{p!}P_{x_0}^{(p)}\underbrace{kk\ldots k}_{p}\right]\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{(n+1)!}\sup_{t\in[0,1]}\rho_{X^{n+1},Y}(P_{x_0+tk}^{(n+1)})\,\rho_X^{n-1}(k) \tag{1.18}$$

unde P este de $(n+1)$ ori diferenţiabil Fréchet în spaţiul L- supermetric X, x_0 şi x_0+k două elemente din domeniul de definiţie D al operatorului P iar intervalul x_0+tk $(t\in[0,1])$ aparţine domeniului D. Pentru $n=0$ (1.18) ne dă teorema de medie (Lagrange) în spaţiul L — supermetric:

$$\rho[P(x_0+k),\ Px_0]\leqslant\sup_{t\in[0,1]}\rho_{X,Y}(P'_{x_0+tk})\,\rho_X(k). \tag{1.19}$$

Teorema 1.1 (Extindere a teoremei lui S. Banach la spaţii supermetrice). Fie operatorul liniar T care aplică spaţiul supermetric complet X în el însuşi. Dacă

$$\rho_{XX}(T)\leqslant q<1 \tag{1.20}$$

ecuaţia

$$x-Tx=f \tag{1.21}$$

are pentru f dat în X o soluţie unică x^* care se poate găsi prin metoda aproximaţiilor succesive, pornind de la x_0 arbitrar în X iar operatorul $I-T$ admite un invers şi

$$\rho_{XX}[(I-T)^{-1}]\cdot\leqslant\frac{1}{1-q}, \tag{1.22}$$

I fiind operatorul identic.

Demonstraţia este dată în ([1], § 6.3) pentru spaţii metrice.

Fie funcţia abstractă $P(t)$ definită pentru $t\in[a,b]$, $(a,b\in R]$ şi cu valori în spaţiul L — supermetric complet. Y. Se spune că $P(t)$ este continuă pe $[a,b]$ dacă $t_n\to t\in[a,b]\Rightarrow Pt_n\to Pt$. În aceste condiţii P este [3] şi uniform continuă şi există integrala generalizată Riemann

$$\int_a^b P(t)dt=\lim_{t_{i+1}-t_i\to 0}\sum_{i=0}^{n-1}P(\tau_i)\,(t_{i+1}+t_i),\ (a=t_0\leqslant t_1\leqslant t_2\leqslant\ldots\leqslant t_a=b). \tag{1.23}$$

Pentru funcţia abstractă $Q(x):X\to[X\to Y]$, X şi Y spaţii L — supermetrice complete se poate utiliza integrala Stieltjes — Gavurin ([3], [4])

$$\int_{x_0}^{\xi}Q(x)\,dx=\lim_{\rho_X(x_{i+1}-x_i)\to 0}\sum_{i=1}^{n-1}Q(\bar{x}_i)\,(x_{i+1}-x_i) \tag{1.24}$$

unde elementele $x_0, x_1,\ldots, x_n=\xi$ aparţin segmentului $[x_0,\xi]\subset(X$ format din elemente de forma $x_i=x_0+t_i(\xi-x_0)$, $t_i\in[0,1]$, $i=1,2,\ldots,n-1$.

Elementele $Q(\bar{x}_i)\ (x_{i+1} - x_i) \in Y$ cu $\bar{x}_i = x_0 + \bar{t}_i(\xi - x_0)$, $\bar{t}_i \in [0,\ 1]$, sînt valori ale operatorului $Q(\bar{x}_i)$ în punctele $(x_{i+1} - x_i)$.

Integrala Stieltjes — Gavurin (1.24) se poate reduce la integrala (1.23) dacă operatorul $Q(x)$ este continuu, prin

$$\int_{x_0}^{\xi} Q(x)\ dx = \int_0^1 Q[s_0 + t(\xi - x_0)]\ (\xi - x_0)dt. \tag{1.25}$$

Există [3] şi proprietatea

$$\int_0^{\xi} P'(x)\ dx = P(\xi) - P(x_0) \tag{1.26}$$

unde $P(x)$ are derivata Fréchet continuă pe $[x_0,\ \xi]$.

Formula generalizată Taylor cu restul sub forma integrală este [3]

$$P(x_0 + k) = Px_0 + P'_{x_0} k + \int_{x_0}^{x_0+k} P''(\bar{x})\ (x_0 + k - \bar{x})\ d\bar{x} \tag{1.27}$$

unde $P''(\bar{x})\ (x_0 + k - \bar{x})$ este funcţie abstractă continuă cu valori în $[X \to Y]$ deci integrala există. Formula (1.27) se deduce din

$$\int_{x_0}^{x_0+k} [P'(\bar{x})\ (x_0 + k - \bar{x})]\ d\bar{x} = P'(\bar{x})\ (x_0 + k - \bar{x}) \Big|_{\bar{x}=x_0}^{\bar{x}=x_0+k} = -\ P'_{x_0} k$$

care la rîndul ei este o consecinţă a lui (1.26).

Dacă în (1.27) ţinem seama de $\bar{x} = x_0 + tk$, aceasta se scrie

$$(Px_0 + k) = Px_0 + P'_0 k + \int_0^1 P''_{x_0+tk}\ (1 - t)\ kk\ dt \tag{1.28}$$

şi

$$\rho_Y[P(x_0 + k) - Px_0 - P'_{x_0}\ k] = \rho_Y \left(\int_0^1 P''_{x_0+tk}\ (1 - t)\ kk\ \ dt\right). \tag{1.29}$$

Integrala din membrul drept din (1.28) este un element h din Y care fiind L — supermetric ne asigură existenţa unei funcţionale liniare şi mărginite L_h astfel încît

$$\rho_{YR}(L_h) = 1 \text{ şi } L_h h = \rho_Y(h). \tag{1.30}$$

Utilizînd (1.30), egalitatea (1.29) ia forma

$$\rho_X[P(x_0 + k) - Px_0 - P'_{x_0} k] = L_h h = \int_0^1 L_h(P''_{x_0+tk}(1 - t)\ kk)\ dt$$

unde s-a folosit şi proprietatea de intervertire dintre integrală şi funcţionala liniară mărginită ([5], VI, § 2).

În continuare, egalitatea precedentă conduce la

$$\rho_Y[P(x_0+k)-Px_0-P'_{x_0}k] \leqslant \int_0^1 |L_h(P''_{x_0+tk}(1-t)t)\,kk]|\,dt$$

$$\leqslant \int_0^1 \rho_{YR}(L_h)\cdot {}_Y(P''_{x_0+tk}(1-t)\,kk)\,dt =$$

$$= \int_0^1 \rho_Y[P''_{x_0+tk}\,(1-t)\,kk]\,dt \leqslant \int_0^1 \rho_{X^2,\,Y}(P''_{x_0}+tk)\,\rho\cdot[(1-tK]\,\rho_X(k)\,dt \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^1 M(1-t)\,\rho_X^2(k)\,dt = \frac{M}{2}\,\rho_X^2(k)$$

unde s-a ţinut seama de (1.11) şi s-a considerat $\rho_{X^2,\,Y}(P''_x) \leqslant M$.
Aşadar:

L e m a 1.1 Dacă $P : X \to Y$ este de două ori continuu diferenţiabil Fréchet şi dacă $\rho_{X_2,\,Y}(P''_x) \leqslant M$ atunci, X şi Y fiind spaţii L—supermetrice,

$$\rho_Y[P(x_0+k)-Px_0-P'_{x_0}k] \leqslant \frac{M}{2}\,\rho^2{}_X(k). \tag{1.31}$$

L e m a 1 . 2. Fie X şi Y spaţii L — supermetrice şi $P : X \to Y$. Dacă P este diferenţiabil Frénght şi dacă P'_x este un operator hölderian [7], adică

$$\rho_{X,\,Y}(P'_{x_1}-P'_{x_2}) \leqslant \overline{M}\,\rho_X^{\alpha}(x_1-x_2) \tag{1.32}$$

pentru orice $x_1,\ x_2 \in X$, $\alpha \in (0,1]$ atunci

$$\rho_Y[P(x_0+k)-Px_0-P'_{x_0}k] \leqslant \frac{\overline{M}}{1+\alpha}\,\rho_X^{1+\alpha}(k)\quad x_0,\ x_0+k \in X. \tag{1.33}$$

Într-adevăr, există identitatea [7]

$$P(x_0+k)-Px_0-P'_{x_0}k = \int_0^1 [P'_{x_0+tk}-P'_{x_0}]\,k\,dt \tag{1.34}$$

de unde

$$\rho_Y[P(x_0+k)-Px_0-P'_{x_0}k] = \rho_Y \int_0^1 (P'_{x_0+tk}-P'_{x_0})\,k\,dt$$

şi pe baza unui raţionament analog celui din demonstraţia lemei 1.1 rezultă

$$\rho_Y[P(x_0+k)-Px_0-P'_{x_0}k] \leqslant \int_0^1 \rho_{X,\,Y}(P'_{x_0+tk}-P'_{x_0})\,\rho_X(k)\,dt \tag{1.35}$$

Utilizînd (1.32) inegalitatea (1.35) se scrie sub forma

$$\rho_Y[P(x_0+k)-Px_0-P'_x k]\ \overline{M}\int_0^1 \rho_X^{\alpha}(tk)\ \rho_X(k)\,dt \leqslant \frac{\overline{M}}{1+\alpha}\,\rho_X^{1+\alpha}(k),$$

unde s-a ţinut seama şi de (1.11).

În această lucrare se dau extinderi ale aplicării metodei Newton — Kantorovici la rezolvarea ecuaţiilor operaţionale definite în spaţii L-supermetrice, folosindu-se lemele 1.1 şi 1.2, extinderi ale lemelor corespunzătoare din [3] şi [7].

2. Teorema 2.1. Fie spaţiul L-supermetric complet X şi operatorul $P(x) : X \to Y$, derivabil în sens Fréchet, Y de acelaşi tip cu X, θ elementul nul al spaţiului Y. Dacă există un element $x_0 \in X$ astfel încît condiţiile următoare sînt îndeplinite

a) operatorul liniar $P'_{x_0} : X \to Y$ are un invers $\Gamma_0 = (P'_{x_0})^{-1}$;

b) există inegalitatea $\rho_X(\Gamma_0 P x_0) \leqslant \eta_0$;

c) operatorul P'_x satisface condiţia Lipschitz

$$\rho_{X,X}(\Gamma_0 P'_{x_1} - \Gamma_0 P'_{x_2}) < M \rho_X(x_1 - x_2) \tag{2.1}$$

pentru orice x_1, x_2 din sfera $S : \rho_X(x - x_0) \leqslant {}^2\eta_0$;

d) constantele M şi η_0 verifică

$$0 < h_0 = M \eta_0 \leqslant \frac{1}{2} ; \tag{2.2}$$

atunci există pentru ecuaţia

$$Px = \theta \tag{2.3}$$

o singură soluţie $x^* \in S$, x^* fiind limita aproximaţiilor $\{x_n\}$ date de

$$x_{n+1} = x_n - \Gamma_n P x_n, \ \Gamma_n = (P'_{x_n})^{-1} \tag{2.4}$$

Demonstraţie. Să arătăm existenţa lui Γ_1. Din (2.1), (2.4) şi condiţia b) rezultă

$$\rho_{X,X}[\Gamma_0(P'_{x_0} - P'_{x_1})] \leqslant M \rho_X(x_0 - x_1) = M \rho_X(\Gamma_0 P x_0) \leqslant M \eta_0.$$

Ţinînd seama de (2.2) putem scrie

$$\rho_{XX}[\Gamma_0(P'_{x_0} - P'_{x_1})] \leqslant h_0 \leqslant \frac{1}{2} \tag{2.5}$$

inegalitatea care, prin teorema 1.1, ne asigură existenţa operatorului invers

$$H_0 = [I - \Gamma_0(P'_{x_0} - P'_{x_1})]^{-1} \tag{2.6}$$

şi cu (1.22)

$$\rho_{X,X}(H_0) \leqslant \frac{1}{1 - h_0} \cdot \tag{2.7}$$

Apoi,

$$H_0 \Gamma_0 = [I - I + \Gamma_0 P'_{x_1}]^{-1} \Gamma_0 = [P'_{x_1}]^{-1} = \Gamma_1 \tag{2.8}$$

de unde rezultă existenţa operatorului Γ_1.

Să arătăm că operatorul Γ_1 verifică condiţia b) a teoremei. Folosim în acest scop formula (1.33) pentru operatorul $\Gamma_0 P$, $\alpha = 1$

$$\rho_Y[\Gamma_0 P x_1 - P x_0 - \Gamma_0 P'_{x_0}(x_1 - x_0)] \leqslant \frac{M}{2} \rho_X^2(x_1 - x_0) =$$

$$= \frac{M}{2} \rho_X^2(-\Gamma_0 P x_0) \leqslant \frac{M}{2} \eta_0^2 \leqslant \frac{1}{2} h_0 \eta_0. \tag{2.9}$$

Dar

$$\rho_X[\Gamma_0 P x_1 - \Gamma_0(P x_0 + P'_{x_0}(x_1 - x_0)] =$$

$$= \rho_X\{\Gamma_0 P x_1 - \Gamma_0[P x_0 + P'_{x_0}(-\Gamma_0 P x_0)]\} = \rho_X(\Gamma_0 P x_1). \tag{2.10}$$

Din (2.9) şi (2.10) rezultă

$$\rho_X(\Gamma_0 P x_1) \leqslant \frac{1}{2} h_0 \eta_0 \tag{2.11}$$

de unde cu (2.8) se obţine

$$\rho_X(\Gamma_1 P x_1) = \rho_X(H_0 \Gamma_0 P x_1) \leqslant \rho_{X,X}(H_0) \cdot \rho_Y(\Gamma_0 P x_1) \leqslant \frac{h_0 \eta_0}{2(1-h_0)} = \eta_1.$$

De aici se vede că este îndeplinită condiţia b) pentru x_1 şi Γ_1.

Condiţia d) a teoremei este îndeplinită pentru constantele şi η_1 M deoarece

$$h_1 = M\eta_1 = \frac{h_0}{\eta_0} \cdot \frac{h_0 \eta_0}{2(1-h)} = \frac{h}{2(1-h_0)} < h^2 \leqslant \frac{1}{4}.$$

Prin inducţie completă se arată că există $\Gamma_n = (P x'_{x_n})$ şi că

$$\begin{aligned} \rho_X(\Gamma_n P x_n) &\leqslant \frac{h_{n-1}\eta_{n-1}}{2(1-h_0)} = \eta_n \\ h_n &= \frac{h_{n-1}^2}{2(1-h_0)^n} \leqslant \frac{1}{2^{n+1}} < \frac{1}{2}. \end{aligned} \tag{2.12}$$

adică condiţiile a), b), d) ale teoremei sînt satisfăcute şi de aproximaţia x_n.

Dar

$$\rho_X(x_n - x_{n+1}) = \rho_X(\Gamma_n P x_n) \leqslant \eta_n. \tag{2.13}$$

Din (2.12) se obţin

$$\eta_n \leqslant \frac{h_{n-1}\eta_{n-1}}{2 \cdot \frac{1}{2^n}} = 2^{n-1} h_{n-1} \eta_{n-1} \tag{2.14}$$

şi

$$h_n \leqslant 2^{n-1} h_{n-1}^2. \tag{2.15}$$

Prin aplicarea succesivă a formulei (2.14) de n ori se ajunge la

$$\eta_n \leqslant 2^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{i=1}^{n-1} h_i h_0 \eta_0 \tag{2.16}$$

şi analog (2.15) conduce la

$$h_n \leqslant 2^{2^n-n-1} h_0^{2^n}. \tag{2.17}$$

Utilizînd (2.17) se determină produsul

$$\prod_{i=1}^{n-1} h_i = 2^{-2+2^n+\frac{2-n-n^2}{2}} h_0^{2^n-2}$$

care înlocuit în (2.16) dă

$$\eta_n \leqslant \frac{\eta_0}{\eta^n} (2h_0)^{2^n-1} \frac{\eta_0}{2^n}. \tag{2.18}$$

Din (2.13) şi (2.18) se deduce

$$\rho_X(x_{n+1} - x_n) \leqslant \frac{\eta_0}{2^n} (2h_0)^{2^n-1} \leqslant \frac{\eta_0}{2^n}. \tag{2.19}$$

Folosind formulele (1.5) şi (2.19) se obţine

$$\rho_X(x_{n+p} - x_n) \leqslant \rho_X(x_{n+1} - x_n) + \rho_X(x_{n+2} - x_{n+1}) + \ldots +$$

$$+ \rho_W(x_{n+p} - x_{n+p-1}) \leqslant \frac{\eta_0}{2^n} (2h_0)^{2^n-1} + \frac{\eta_0}{2^{n+1}} (2h_0)^{2^{n+1}-1} + \ldots +$$

$$+ \frac{\eta_0}{2^{n+p-1}} (2h_0)^{2^{n+p-1}} - 1$$

sau

$$\rho_X(x_{n+p} - x_n) \leqslant \frac{\eta_0}{2^{n-1}} (2h_0)^{2^n-1}(1 - 2^{-p}). \tag{2.20}$$

Din (2.20) se vede că şirul $\{x_n\}$ este şir Cauchy şi cum spaţiul X este complet rezultă existenţa elementului x^* astfel încît $x^* = \lim_n x_w$.

Aproximaţiile x_n calculate cu algoritmul (2.4) aparţin sferei S. Într-adevăr

$$\rho_X(x_0 - x_n) = \rho_X(x_0 - x_1) + \rho_X(x_1 - x_2) + \ldots + \rho_Y(x_{n-1} - x_n)$$

de unde, cu (2.19)

$$\rho_X(x_n - x_0) \leqslant \eta_0 \left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}}\right) = 2\eta_0 \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) \leqslant 2\eta_0.$$

Înlocuind în (2.9) şi (2.10) pe x_1 cu x_n şi x_0 cu x_{n-1} se ajunge la

$$\rho_X(\Gamma_0 P x_n) \leqslant \frac{M}{2} \rho_X^2(x_n - x_{n-1})$$

de unde se vede că $\rho_X(\Gamma_0 P x_n) \to \theta$ cînd $n \to \infty$ deci cînd $x_n \to x^*$.

Cum operatorul $\Gamma_0 Px$ este continuu rezultă că $\Gamma_0 Px^* = \theta$ de unde, ţinînd seama de faptul că Γ_0 este liniar, rezultă $Px^* = \theta$.

Rapiditatea convergenţei şirului $\{x_n\}$ se obţine făcînd $p \to$ în ∞ (2.20)

$$\rho_X(x^* - x_n) \leqslant \frac{\eta_0}{2^n} (2h_0)^{2^n-1}.$$

Soluţia x^* este unică. Fie $y \in S$ o soluţie oarecare a ecuaţiei (2.3). Introducînd operatorul auxiliar $Q_n x = x - \Gamma_n Px$ se vede că

$$Q_n y = y - (P'_{x_n})^{-1} Py = y; \quad Q_n x_n = x_{n+1}, \; Q'_n(x_n) = \Theta.$$

Operatorul Q'_n este lipschitziant (*) cu constanta

$$\frac{M}{(1-h_0)^n}$$

şi aplicîndu-i lema 1.2, $\alpha = 1$ se obţine

$$\rho_X(Q_n y - Q_n x_n - Q'_n(x_n)\,(y - x_n) - \leqslant \frac{M}{2\,(1-h_0)^n}\, \rho_X^2(y - x_n)$$

sau

$$\rho_X(y - x_{n+1} \leqslant \frac{2^{n-2}}{\eta_0}\, \rho_X^2(y - x_n) \tag{2.21}$$

unde s-a ţinut seama de relaţiile precedente, de $h_0 = M\eta_0$ şi $h_0 \leqslant \frac{1}{2}$.

Deoarece $y \in S$ avem $\rho_X(y - x_0) \leqslant 2\eta_0$ iar din (2.21) se obţin $\rho_X(y - x_1) \leqslant$

$$\leqslant \eta_0, \; \rho_X(y - x_2) \leqslant \frac{\eta_0}{2}, \; \rho_X(y - x_3)\, \frac{\eta_0}{2^2}, \ldots, \; \rho_X(y - x_{n+1}) \leqslant \frac{\eta_0}{2^n}.$$

de unde rezultă $x_n \to y$ cînd $n \to \infty$. Cum $x_n \to x^*$ înseamnă că $x = y$ astfel că ecuaţia (2.3) are soluţie unică în S.

Afirmaţia (*) se verifică uşor prin inducţie completă. Astfel

$$\rho_{X,X}(Q'_1(x_1) - Q'_1(x_2)] = \rho_{X,X}(\Gamma_1 P'_{x_1} - \Gamma_1 P'_{x_2}) = \rho_{X,X}(H_0 \Gamma_0 P'_{x_1} -$$

$$- H_0 \Gamma_0 P'_{x_2}) \leqslant \rho_{X,X}(H_0) \cdot \rho_{X,X}(\Gamma_0 P'_{x_1} \Gamma_0 P'_{x_2}) \leqslant \frac{1}{1-h_0} M \rho_X^2(x_1 - x_2)$$

ş.a.m.d.

T e o r e m a 2.2. Fie spaţiul L — supermetric complet X şi operatorul $P : X \to Y$, derivabil în sens Fréchet, Y de acelaşi tip cu X, θ elementul nul al spaţiului Y.

Dacă există un element $x_0 \in S$ astfel încît condiţiile următoare sînt îndeplinite:

a) operatorul $P'_{x_0} \in [X \to Y]$ admite invers $\Gamma_0 = (P'_{x_0})^{-1}$ şi

$$\rho_{Y,X}(\Gamma_0) \leqslant B_0; \tag{2.22}$$

b) x_0 verifică aproximativ ecuația (2.3) și

$$\rho_X(\Gamma_0 P x_0) \leqslant \eta_0; \tag{2.23}$$

c) operatorul P'_x este holderian

$$\rho_{X,Y}(P'_{x_1} - P'_{x_2}) \leqslant \overline{M}\rho_X^\alpha(x_1 - x_2), \ \alpha \in (0, 1] \tag{2.24}$$

oricare ar fi $x_1, x_2 \in S$, unde S este dată prin

$$\rho_X(x - x_0) \leqslant r, \ r = \frac{(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}[(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} h_0]^{1-\frac{1}{\alpha}}}{(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} - 1}\eta_0; \tag{2.25}$$

d) există inegalitatea

$$h_0 = B_0\overline{M}\eta_0^\alpha \leqslant \frac{\alpha}{1+\alpha}; \tag{2.26}$$

atunci ecuația (2.3) are cel puțin o soluție x^* care aparține sferei S, x^* fiind limita șirului aproximațiilor x^* date de (2.4). Dacă sfera S este înlocuită cu sfera S_0 dată de

$$\rho_X(x - x_0) \leqslant \frac{(1+\alpha)^{\frac{2\alpha-1}{\alpha^2}}}{\alpha^{\frac{1}{\alpha}}}\eta_0 \tag{2.27}$$

atunci ecuația (2.3) are o singură soluție $x^* \in S_0$.

D e m o n s t r a ț i e. Se arată că la fiecare pas i, aproximația x_i obținută din x_{i-1}, $i = 1, 2, 3, \ldots n$, prin algoritmul (2.4) satisface condițiile teoremei. Din

$$\rho_X(x_0 - x_1) = \rho_X(\Gamma_0 P x_0) \leqslant \eta_0; \ \rho_{X,Y}(P x'_{x_0} - P'_{x_1}) \leqslant \overline{M}\rho_X^\alpha(x_0 - x_1) \leqslant \overline{M}\eta_0^\alpha$$

rezultă ([1], § 6.2)

$$\rho_{X,X}[\Gamma_0(P'_{x_0} - P'_{x_1})] \leqslant B_0\overline{M}\eta_0^\alpha = h_0 \leqslant \frac{\alpha}{1+\alpha} < 1. \tag{2.28}$$

Teorema 1.1 și relația (2.28) asigură existența operatorului

$$H_0 = [I - \Gamma_0(P'_{x_0} - P'_{x_1})]^{-1}$$

iar

$$\rho_{X,X}(H_0) \leqslant \frac{1}{1 - h_0}.$$

Existența operatorului invers $\Gamma_1 = (P'_{x_1})^{-1}$ rezultă din H_0 $\Gamma_0 = \{I -$

$$- \Gamma_0[P'_{x_0} - P'_{x_1}]\}^{-1}(P'_{x_0})^{-1} = \Gamma_1$$

și

$$\rho_{X,X}(\Gamma_1) \leqslant \frac{B_0}{1 - h_0} = B_1. \tag{2.29}$$

Aşadar, condiţia a) este verificată de x_1. Utilizînd formula (1.33) şi condiţia c) a teoremei se obţine

$$\rho_Y[Px_1 - Px_0 - P'_{x_0}(x_1 - x_0)] \leqslant \frac{\overline{M}}{1+\alpha} \rho_X^{1+\alpha}(x_1 - x_0)$$

care în baza algoritmului (2.4) şi a condiţiei b) ne dă

$$\rho_X(Px_1) \leqslant \frac{M}{1+\alpha} \eta_X^{1+\alpha}.$$

Atunci, ţinînd seama şi de condiţiile (2.22) şi (2.26) sîntem conduşi la

$$\rho_{X,X}(\Gamma_0 Px_1) \leqslant \rho_{Y,X}(\Gamma_0)\ \rho_Y(Px_1) \leqslant \frac{B_0\overline{M}}{1+\alpha}\ \eta_0^{1+\alpha} = \frac{h_0\eta_0}{1+\alpha}$$

din care rezultă

$$\rho_{X,X}\Gamma_1 Px_1) = \rho_{X,X}(H_0\Gamma_0 Px_1) \leqslant \frac{\eta_0 h_0}{(1+\alpha)\ 1-h_0)} = \eta_1. \tag{2.30}$$

Aşadar, există η_1 astfel încît $\rho_{X,X}(\Gamma_1 Px_1) \leqslant \eta_1$ şi condiţia b) este verificată. Utilizînd (2.29) şi (2.30) se arată că şi condiţia d) este îndeplinită

$$h_1 = B_1\overline{M}\eta_1^\alpha = \frac{B_0}{1-h_0}\cdot\frac{h^0}{B_0\eta_0^\alpha}\cdot\frac{h_0^\alpha\eta_0^\alpha}{(1+\alpha)^\alpha\ (1-h_0)^\alpha}(1+\alpha)\ h_0^{1+\alpha} \leqslant \frac{\alpha}{\alpha+1}.$$

Prin inducţie completă se arată că condiţiile a), b), d) sînt îndeplinite pentru orice aproximaţie x_n, obţinută prin algoritmul (2.4), constantele B_1, h_1, η_1 fiind înlocuite cu

$$B_n = \frac{B_{n-1}}{1-h_{n-1}},\quad \eta_n = \frac{h_{n-1}\eta_{n-1}}{(1+\alpha)(1-h_{n-1})}; \tag{2.31}$$

$$\rho_X(\Gamma_n Px_n) \leqslant \eta_n;\ h_n = B_n\overline{M}\eta_n^\alpha \leqslant \frac{\alpha}{1+\alpha}.$$

Pentru h_n, folosind relaţiile din (2.31), se obţine delimitarea

$$h_n = (1+\alpha)\ h_{n-1}^{1+\alpha} \leqslant \frac{\alpha}{1+\alpha} \tag{2.32}$$

care aplicată succesiv de n ori duce la

$$h_n \leqslant (1+\alpha)\ (1+\alpha)^{1+\alpha}(1+\alpha^{(1+\alpha)^2}\ldots(1+\alpha)^{(1+\alpha)^{n-1}}\ h_0^{(1+\alpha)^n}$$

sau

$$h_n \leqslant (1+\alpha)^{-\frac{1}{\alpha}}[(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}\ h_0]^{(1+\alpha)^n}. \tag{2.33}$$

Din a doua relaţie (2.31) se obţine $\eta_n \leqslant h_{n-1}$ care aplicată succesiv de n_{n-1} ori duce la

$$\eta_n \leqslant \prod_{i=1}^{n-1} h_i \eta_0$$

de unde cu (2.33) se obţine

$$\eta_n \leqslant (1+\alpha)^{-\frac{n}{\alpha}} [(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} h_0]^{\frac{(1+\alpha)^n - 1}{\alpha}} \eta_0. \tag{2.34}$$

Şirul $\{x_n\}$ dat de (2.4) este şir Cauchy. Într-adevăr

$$\rho_X(x_{n+p} - x) \leqslant \sum_{k=1}^{p} \rho_X(x_{n+k} - x_{n+k-1}) \leqslant \sum_{k=1}^{p-1} \eta_{n+k-1}$$

care cu (2.34) dă

$$\rho_X(x_{n+p} - x_n) \leqslant \sum_{k=1}^{p-1} (1+\alpha^{-\frac{n+k-1}{\alpha}} [(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} h_0]^{\frac{(1+\alpha)^{n+k-1}-1}{\alpha}} \eta_0.$$

sau

$$\rho_X(x_{n+p} - x_n) \leqslant \frac{(1+\alpha)^{-\frac{n-1}{\alpha}}}{(1-\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} - 1} [(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} h_0]^{(\alpha+1)^n - \frac{1}{\alpha}} \eta_0. \tag{2.35}$$

Pentru a dovedi că $x_n \in S$, oricare ar fi $n \in N$ se observă că

$$\rho_X(x_n - x_0) \leqslant \sum_{i=0}^{n=1} \rho_X(x_i - x_{i-1}) \leqslant \sum_{i=0}^{n-1} \eta_i.$$

Ţinînd seama de (2.34) se obţine

$$\rho_X(x_n - x_0) \leqslant \frac{(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} [(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} h_0]^{1-\frac{1}{\alpha}}}{(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} 1 -} \eta_0.$$

Cum

$$(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} h_0 \leqslant (1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} \frac{\alpha}{1+\alpha} \leqslant 1.$$

rezultă din (2.35) că şirul $\{x_n\}$ este şir Cauchy. Spaţiul supermetric X fiind complet, rezultă că $x_n \to x^*$. Dacă în (2.35) se face $n = 0$ şi $p \to \infty$ se găseşte că $x^* \in S$ luînd în considerare (2.25).

Dacă se aplică formula (1.27) pentru elementele x_{n+1} şi x_n se obţine

$$\rho_Y(Px_n) \leqslant \frac{\overline{M}}{1+\alpha} \rho_X^{1+\alpha}(x_{n+1} - x_n)$$

unde trecînd la limită, $n \to \infty$, se ajunge la $Px^* = \theta$, ţinîndu-se seama de derivabilitatea şi deci continuitatea operatorului P. Aşadar x^* este soluţie a ecuaţiei (2.3).

Trecînd la limită, $p \to \infty$, în (2.35) se află că rapiditatea convergenţei lui x_n către x^* este dată de

$$\rho_X(x_n - x^*) \leqslant \frac{(1+\alpha)^{-\frac{n-1}{\alpha}}}{(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} - 1} [(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} h_\theta]^{(\alpha+1)^n - \frac{1}{\alpha}} \eta_0.$$

Să arătăm că în sfera S_0 ecuaţia (2.3) are soluţie unică. Deoarece

$$\frac{(1+\alpha)^{2-\frac{1}{\alpha}}}{\alpha^{\frac{1}{\alpha}}} \leqslant \frac{(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} [(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} h_0]^{1-\frac{1}{\alpha}}}{(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} - 1},$$

unde $h_0 = \frac{\alpha}{1+\alpha}$, rezultă, potrivit celor demonstrate, că ecuaţia (2.3) are cel puţin o soluţie x^* în S_0, limită a şirului $\{x_n\}$ dat de (2.4). Să arătăm că ea este unică. Fie y o soluţie oarecare a ecuaţiei (2.3), $y \in S_0$. Raţionînd ca în cazul teoremei precedente se obţine

$$\rho_X(y - x_{n+1}) \leqslant \frac{\overline{M} B_0 \rho_X^{1+\alpha}(y - x_n)}{(1+\alpha)(1 - h_{-n_1}) \dots (1 - h_0)}$$

de unde cu

$$h_n \leqslant \frac{\alpha}{1+\alpha} \text{ şi } \rho_X(y - x_n) \leqslant \frac{(1+\alpha)^{2-\frac{1}{\alpha}}}{\alpha^{\frac{1}{\alpha}}} \eta_0, \; h_0 = \overline{M} B_0 \eta_0^\alpha$$

se ajunge la

$$\rho_X(y - x_{n+1}) \leqslant \frac{\alpha(1+\alpha)^{n-2}}{\eta_0^\alpha} \rho_X^{1+\alpha}(y - x_n),$$

relaţie care aplicată succesiv de $n+1$ ori ne dă

$$\rho_X(y - x_{n+1}) \leqslant \alpha \sum_{i=0}^{n} (1+\alpha)^i \cdot (1+\alpha)^{-(1+\alpha)^{n-1}(2\alpha+3) + \sum_{i=1}^{n-2} i(1+\alpha)^{n-i-2}} \cdot$$

$$\cdot \eta_0^{1-(1+\alpha)^{n+1}} \cdot [\eta_X(y - x_0)]^{(1+\alpha)^{n+1}}$$

Această inegalitate se transformă în

$$\rho_X(y - x_{n+1}) \leqslant \alpha^{\frac{1}{\alpha}}(1+\alpha)^{\frac{\alpha n+\alpha^2+1}{\alpha^2}} \cdot \eta_0^{1-(1+\alpha)^{n+1}} \cdot \left[\frac{\alpha^{\frac{1}{\alpha}}}{(1+\alpha)^{\frac{2\alpha-1}{\alpha^2}}} q\eta_0\right]^{(1+\alpha)^{n+1}}$$

calculîndu-se sumele şi punîndu-se $\rho_X(y - x_0) \leqslant q\ \eta_0$. Se obţine în definitiv pentru $\rho_X(y - x_{n+1})$ evaluarea

$$\rho_X(y - x_{n+1}) \leqslant \alpha^{\frac{1}{\alpha}}(1+\alpha)^{\frac{\alpha n+\alpha^2+1}{\alpha^2}} \cdot \left[\frac{\alpha^{\frac{1}{\alpha}}}{(1+\alpha)^{\frac{2\alpha-1}{\alpha^2}}} q\right]^{(1+\alpha)^{n+1}} \tag{2.36}$$

de unde se vede că $x_n \to y$ numai dacă $q \leqslant \dfrac{(1+\alpha)^{\frac{2\alpha-1}{\alpha^2}}}{\alpha^{\frac{1}{\alpha}}}$ adică dacă este îndeplinită condiţia (2.27). Cum există şi $x_n \to x^*$, $x^* \in S_0$ rezultă $x^* = y$, adică ecuaţia (2.3) are soluţie unică în S_0.

O b s e r v a ţ i e. Dacă X şi Y sînt spaţii Banach se regăsesc rezultatele din ([4], II, §§ 2, 3)

3. În [6] L. V. Kantorovici a generalizat la ecuaţii operaţionale procedeul lui D.A. Grawe pentru cazul ecuaţiilor cu variabilă reală. Procedeul generalizat al lui D.A. Grawe foloseşte algoritmul

$$x_{n+1} = x_n - q\Gamma_n P x, \tag{3.1}$$

unde q este un număr real, $0 > q > 1$.

Extindem în cele ce urmează teorema 4 ([6], § 5) la spaţii L — supermetrice.

T e o r e m a 3.1. Fie spaţiile L — supermetrice complete X şi Y şi operatorul $P : X \to Y$.

Dacă

a) pentru elementul x_0 operatorul $P'_{x_0} : X \to Y$ are invers $\Gamma_0 = (P'_{x_0})^{-1}$ şi este cunoscută delimitarea

$$\rho_{Y,X}(\Gamma_0) \leqslant B_0; \tag{3.2}$$

b) elementul x_0 verifică aproximativ ecuaţia (2.3) şi este şi este cunoscută delimitarea

$$\rho_X(\Gamma_0 P x_0) \leqslant \eta_0; \tag{3.3}$$

c) P''_x, derivata a doua în sens Fréchet a operatorului P, este uniform mărginită în norma generalizată, adică

$$\rho_{X^2,Y}(P''_x) \leqslant K \tag{3.4}$$

pentru orice x din sfera S dată de inegalitatea

$$\rho_X(x - x_0) \leqslant N(h_0)\ \eta_0 = \frac{1-\sqrt{1-2h_0}}{h_0}\eta_0; \tag{3.5}$$

d) constantele B_0, η_0, K satisfac relaţia

$$h_0 = B_0\eta_0 K \leqslant \frac{1}{2}\cdot \tag{3.6}$$

Atunci ecuaţia (2.3) admite cel puţin o soluţie $x^* \in S$ iar şirul $\{x_n\}$ al aproximaţiilor succesive (3.1) converge către x^* iar rapiditatea convergenţei este dată de

$$\rho_X(x^n - x^*) \leqslant A^n \frac{q_0\eta_0}{1-A}, \tag{3.7}$$

unde A este dat prin (3.17).

Demonstraţie. Notînd

$$F_q x = x - q\ \Gamma_0 P x,$$

aproximaţia x_1 se exprimă cu (3.1) sub forma $x_1 = F_q \cdot x_0$. Vom arăta, ca şi în cazul teoremelor precedente că procedeul poate fi continuat adică condiţiile a), b), d) sînt verificate de orice aproximaţie x_n. Să arătăm acest lucru pentru aproximaţia x_1.

Din

$$x_1 = x_0 - q\Gamma_0 P x_0$$

rezultă

$$\rho_X(x_1 - x_0) = \rho_X(q\Gamma_0 P x_0) \leqslant q\rho_X(\Gamma_0 P x_0) \leqslant q\ \eta_0. \tag{3.8}$$

Aplicînd pentru operatorul F_q formula lui Taylor (1.18) se obţine

$$\rho_Y(F_q x_1 - F_q x_0) \leqslant \rho_Y[F'_q(x_0)(x_1 - x_0] + \frac{1}{2}\sup_{t\in[0,1]} \rho_{X^2,Y}[F''_q(x_0 + t(x -$$

$$- x_0)]\rho_X^2(x_1 - x_0) \leqslant \rho_{X,Y}(I - qI)\,\rho_x(x_1 - x_0) + \frac{1}{2} qB_0K\rho_X^2(x_1 - x_0)$$

sau

$$\rho_Y(F_q x_1 - F_q x_0) \leqslant (1-q)q\eta_0 + \frac{1}{2} qB_0K(q\eta_0)^2. \tag{3.9}$$

Din

$$F_q x_1 - x_1 = -q\ \Gamma_0 P x_1$$

rezultă

$$\rho_X(\Gamma_0 P x_1) = \frac{1}{q}\rho_X(F_q x_1 - x_1) = \frac{1}{q}\rho_Y(F_q x_1 - F_q x_0)$$

care cu (3.9) şi (3.6) se transformă în

$$\rho_X(\Gamma_0 P x_1) \leqslant (1-q)\eta_0 + \frac{1}{2} q^2 h_0\eta_0. \tag{3.10}$$

Apoi, aplicînd formula lui Lagrange (1.19) operatorului P'_x se obține

$$\rho_{X,X}(\Gamma_0 P'_{x_0} - \Gamma_0 P'_{x_1}) \leqslant B_0 \sup_{t[0,1]} \rho_{X^2,Y}(P''_{x_0} + t(x_1 - x_0) \cdot \rho_X(x_1 - x_0) \leqslant$$

$$\leqslant B_0 K q \eta_0 = q h_0 < 1$$

de unde în baza teoremei 1.1 rezultă existența operatorului invers

$$H = [I - \Gamma_0(P'_{x_0} - P'_{x_0})]^{-1}$$

iar pentru norma sa există delimitarea

$$\rho_{X,X}(H) \leqslant \frac{1}{1 - q h_0}. \tag{3.11}$$

Dar

$$\Gamma_1 = (P'_{x_1})^{-1} = [I - \Gamma_0(P'_{x_0} - P'_{x_1})]^{-1} \Gamma_0 = H \Gamma_0,$$

de unde

$$_{Y,X}(\Gamma_1) \leqslant \frac{B_0}{1 - qh} = B_1.$$

deci condiția a) este verificată

Și condiția b) este verificată deoarece

$$\rho_{X,X}(\Gamma_1 P x_1) = \rho_{X,X}(H \Gamma_0 P x_1) \leqslant \rho_{X,X}(H) \rho_X(\Gamma_0 P x_1) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{1 - qh} \eta_0 \left(1 - q + \frac{q^2}{2} h_0\right) = \eta_1. \tag{3.12}$$

Apoi,

$$h_1 = B_1 K \eta_1 = \frac{B_0 K}{(1 - q h_0)^2} \left(1 - q + \frac{1}{2} q^2 h_0\right) \eta_0 = \frac{1}{2} - \frac{1 - 2h_0}{2(1 - q h_0)} \leqslant \frac{1}{2}$$

astfel că și condiția d) este verificată.

Prin inducție completă se arată continuarea nelimitată a procesului iar numerele legate de aproximația x_n verifică relațiile

$$B_n = \frac{B_{n-0}}{1 - q h_{n-1}}, \quad \eta = \frac{1}{1 - q h_{n-1}} \left(1 - q + \frac{q^2}{2} h_{n-1}\right) \eta_{n-1}, \quad h_n =$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1 - 2h_{n-1}}{2(1 - q h_{n-1})^2}. \tag{3.13}$$

și există evaluările $\left(\text{în cazul cel mai puțin avantajos } h_0 = \frac{1}{2}\right)$

$$\eta_1 \leqslant \left(1 - \frac{q}{2}\right) \eta_0, \quad \eta_2 \leqslant \left(1 - \frac{q}{2}\right) \eta_1 \leqslant \left(1 - \frac{q}{2}\right)^2 \eta_0, \ldots, \eta_n \leqslant \left(1 - \frac{q}{2}\right)^n \eta_0.$$

Dar

$$\rho_X(x_n - x_{n+1}) = \rho_X(q \Gamma_n P x_n) \leqslant q \eta_n$$

şi astfel

$$\rho_X(x_n - x_{n+p}) \leqslant \sum_{i=1}^{n+p-1} \rho_X(x_i - x_{i+1}) \leqslant q \sum_{i=n}^{n+p-1} \eta_i$$

adică

$$\rho_X(x_n - x_{n+p}) \leqslant q \sum_{i=1}^{n+p-1} \left(1 - \frac{q}{2}\right)^i \eta_0 \leqslant \tag{3.14}$$

$$\leqslant 2\eta_0 \left(1 - \frac{q}{2}\right)^n \left[1 - \left(1 - \frac{q}{2}\right)^p\right].$$

Din (3.14) rezultă că $\{x_n\}$ este şir Cauchy şi deci, X fiind spaţiu L — supermetric complet, există un element $x^* \in X$ astfel încît $\lim\limits_n x_n = x^*$. Trecînd la limită în (3.14) cînd $p \to \infty$ se obţine

$$\rho_X(x_n - x^*) \leqslant 2\left(1 - \frac{q}{2}\right)^n \eta_0 \tag{3.14'}$$

de unde se vede că rapiditatea convergenţei are ordinul unei progresii geometrice.

A rămas să arătăm că $x_n \in S$ pentru orice n. Într-adevăr

$$\rho_X(x_n - x_0) \leqslant \sum_{i=0}^{n-1} \rho_X(x_{i+1} - x_i) \leqslant q \sum_{i=0}^{n-1} \eta_i \leqslant 2\left[1 - \left(1 - \frac{q}{2}\right)^n\right] \eta_0 \leqslant N(h_0)\, \eta_0.$$

În cazul mai general, considerînd evaluarea

$$h_n \leqslant h_{n-1}$$

obţinută din ultima relaţie (3.13), a doua relaţie (3.13) aplicată succesiv de n ori ne dă

$$\eta_n \leqslant \left(1 - \frac{q}{2}\right)^{-n} \left[\left(1 - q\right) + \frac{q^2}{2} h_0\right]^n \eta_0. \tag{3.15}$$

Cu evaluarea (3.15) pentru η_n obţinem

$$\rho_X(x_n - x_{n+p}) \leqslant A^n \frac{1 - A^p}{1 - A} q\eta_0. \tag{3.16}$$

unde

$$A = \left(1 - \frac{q}{2}\right)^{-1} \left[(1 - q) + \frac{q^2}{2} h_0\right] < 1. \tag{3.17}$$

Din evaluările (3.16) şi (3.17) rezultă că $\{x_n\}$ este un şir Cauchy şi deci există $x^* \in X$ astfel încît $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x^*$.

Trecînd la limită în (3.16) cînd $p \to \infty$ se observă că rapiditatea convergenței este tot de ordinul unei progresii geometrice

$$\rho_X(x_n - x^*) \leqslant A^n \frac{q\eta_0}{1-A}. \tag{3.18}$$

Făcînd în (3.18) $n = 0$ se găsește

$$\rho_X(x_0 - x^*) \leqslant \frac{q\eta_0}{1-A} \leqslant N(h_0)\,\eta_0$$

adică x^* se află în sfera S. Ușor se verifică afirmația că $x \in S$ pentru orice n. Astfel

$$\rho_X(x_n - x_0) \leqslant \sum_{i=0}^{n-1} \rho_X(x_{i+1} - x_i) \leqslant q \sum_{i=0}^{n-1} \eta_i \leqslant q \sum_{i=0}^{n-1} A^i \eta_0 =$$

$$= q \frac{1-A}{1-A^n} \eta_0 \leqslant N(h_0)\,\eta_0.$$

Pentru a arăta că x^* este soluție a ecuației (2.3) se utilizează egalitatea (3.1) sub forma

$$\frac{1}{q} P'_{x_n}(x_{n+1} - x_n) + Px_n = 0.$$

Trecînd în această relație la limită cînd $n \to \infty$ observăm că

$$\rho_X(x_{n+1} - x_n) \to 0 \text{ în baza lui (3.17).}$$

Apoi,

$$\rho_{X,Y}(P'_{x_n}) \leqslant \rho_{X,Y}(P'_{x_0}) + \rho_{X,Y}(P'_{x_n} - P'_{x_0}) \leqslant \rho_{X,Y}(P'_{x_0}) + K\rho_X(x_n - x)$$

adică

$$\rho_{X,Y}(P'_{x_n}) \leqslant \rho_{X,Y}(P'_{x_0}) + KN(h_0)\,\eta_0, \tag{3.19}$$

unde pentru mărginirea (3.19) s-a aplicat formula lui Lagrange diferenței $P'_{x_n} - P'_{x_0}$.

Prin urmare $Px_n \to \theta$ și cum $x_n \to x^*$ rezultă, în baza continuității lui P, că

$$Px^* = \theta$$

O b s e r v a ț i i. 1°. Evaluarea (3.14′) a rapidității convergenței se obține din (3.18) pentru $h_0 = \frac{1}{2}$.

2°. Evaluarea (3.18) poate fi îmbunătățită dacă se îmbunătățește evaluarea $h_n \leqslant h_{n-1}$.

BIBLIOGRAFIE

1. L. Collatz, *Funktionalanalysis und numerische Mathematik*, Springer Verlag, Berlin. Göttingen. Heidelberg 1964.
2. S. Groze, B. Janko, *Asupra rezolvării ecuațiilor operaționale neliniare definite în spații L-supermetrice*. Lucrările colocviului asupra teoriei aproximării funcțiilor. Cluj, 1967.
3. Л. В. Канторович, *Некоторые дальнейшие применения метода Нютона для функциональных уравнений*, Весмн. Ленингр. Унив., 7, (1957), 68—103.
4. B. Janko, *Rezolvarea ecuațiilor operaționale neliniare în spații Banach*, Editura Acacemiei Republicii Socialiste România, București, 1969.
5. G. Marinescu, *Spații vectoriale normate*, Editura Academiei Republicii Populare Române, București, 1956.
6. Л. В. Канторович, *О методе Ньютона, Труды математ. ин-та им. В. А. Стеклова*, 28 (1949), 104—144.
7. Б. А. Вертгеим, *Об условиях применения метода Ньютона*, ДАН СССР, 110, ном. 5 (1956).

К ВОПРОСУ ПРИМЕНЕНИЯ МЕТОДА НЬЮТОНА-КАНТОРОВИЧА К РЕШЕНИЮ НЕЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ, ОПРЕДЕЛЕННЫХ СУПЕРМЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ

Краткое содержание

В работе даются теоремы существования (и единственности) решения уравнения (2.3) путём применения формул (2.4) и (3.1) улучшая некоторые результаты [3], [4], [6] распространением пространства.

SUR UNE REPRÉSENTATION DU TYPE DE PAPKOVITCH-NEUBER DANS LE CAS DES CORPS DU TYPE DE COSSERAT

P. P. TEODORESCU

1°. Dans le cas des corps classiques, l'on doit à P. F. Papkovitch [4] et à H. Neuber [1] une représentation du problème statique de la théorie de l'élasticité, à l'aide de quatre fonctions de déplacement (une fonction vectorielle et une fonction scalaire); le pendant dynamique de cette représentation a été donné par E. Sternberg et R. A. Eubanke [5]. On suppose avoir à faire avec des corps homogènes, isotropes, linéairement élastiques, soumis à des petites déformations et rotations.

Le problème a été repris pour le cas des corps du type de Cosserat, même dans le cas anisotrope, par H. Neuber [2], qui a trouvé une représentation similaire; des considérations dans cette direction sont dues aussi à W. Nowacki [3].

En utilisant une représentation due à N. Şandru [6], dont la complétitude a été démontrée par W. Nowacki [3] et puis par nous [7], d'une manière plus simple, nous allons présenter, dans ce qui va suivre, une autre représentation du type de Papkovitch-Neuber, représentation qui diffère de celles données antérieurement.

2°. Dans l'absence des forces et des moments volumiques, les vecteurs déplacement et rotation peuvent être exprimés, d'après N. Şandru [6], sous la forme

$$\vec{u} = (\lambda + 2\,G)\,(G' + \alpha')\,\square_1 \square_2' \vec{\Gamma} - D_2' \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{\Gamma} - $$
$$- 2\,\alpha\,(\lambda' + 2\,G')\,\square_1' \operatorname{rot} \vec{\Gamma}', \tag{1}$$

$$\vec{\Phi} = (\lambda' + 2\,G')\,(G + \alpha)\,\square_1' \square_2 \vec{\Gamma}' - $$
$$- D_2 \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{\Gamma}' - 2\,\alpha\,(\lambda + 2\,G)\,\square_1 \operatorname{rot} \vec{\Gamma}, \tag{1'}$$

où λ, G, α, λ', G', α' sont les constantes élastiques du corps du type de Cosserat, λ et G étant les constantes de Lamé, et $\vec{\Gamma}$ et $\vec{\Gamma}'$ sont des vecteurs potentiel de la classe C^6, qui doivent vérifier les équations

$$\square_1 D \vec{\Gamma}\; x,\, y,\, z;\, t) = 0 \qquad \square_1' D \vec{\Gamma}'(x,\, y,\, z;\, t) = 0. \tag{2}$$

On a introduit les opérateurs

$$D = (G + \alpha)\;(G' + \alpha')\;\square_2 \square_2' + 4\alpha^2 \triangle, \tag{3}$$

$$D_2 = (\lambda' + G' - \alpha')\ (G + \alpha)\ \Box_2 - 4\alpha^2, \tag{4}$$

$$D_2' = (\lambda + G - \alpha)\ (G' + \alpha')\ \Box_2' - 4\ \alpha^2, \tag{4'}$$

les opérateurs du type de d'Alembert étant exprimés par

$$\Box_1 = \triangle - \frac{1}{c_1^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2},\ \Box_1' = \triangle - \frac{1}{c_1'^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{1}{h^2}, \tag{5}$$

$$\Box_2 = \triangle - \frac{1}{c_2^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2},\ \Box_2' = \triangle - \frac{1}{c_2'^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{1}{l'^2}\frac{\alpha}{G}, \tag{5'}$$

où $\triangle$ est l'opérateur de Laplace

$$\triangle = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}; \tag{6}$$

les vitesses de propagation des ondes sont données par

$$c_1^2 = \frac{\lambda + 2\,G}{\rho}\ ,\quad c_1'^2 = \frac{\lambda' + 2G'}{J}, \tag{7}$$

$$c_2^2 = \frac{G + \alpha}{\rho}\ ,\quad c_2'^2 = \frac{G' + \alpha'}{J}, \tag{7'}$$

ρ étant la masse spécifique et J étant un moment d'inertie spécifique, dû à la rotation, les constantes élastiques l' et h, exprimées à l'aide des autres constantes par les formules

$$l'^2 = \frac{G' + \alpha'}{4G}\ ,\quad h^2 = \frac{\lambda' + 2G'}{4\alpha}, \tag{8}$$

ayant la dimension d'une longueur.

On observe qu'entre ces opérateurs on a les relations

$$(\lambda + 2G)\,\Box_1 - (G + \alpha)\,\Box_2 = (\lambda + G - \alpha)\,\triangle, \tag{9}$$

$$(\lambda' + 2\,G')\,\Box_1' - (G' + \alpha')\,\Box_2' = (\lambda' + G' - \alpha')\,\triangle, \tag{9'}$$

qui sont utiles dans le calcul.

La représentation (1), (1') est complète pour un domaine simplement connexe (c'est à dire, tout état de déplacement et rotation peut être exprimé sous cette forme).

3°. On introduit les vecteurs potentiel $\vec{\chi} = \vec{\chi}\,(x, y, z\,; t)$ et $\vec{\chi}' = \vec{\chi}'\,(x, y, z\,; t)$ et les scalaires potentiel $\chi_0 = \chi_0\ (x,\ y,\ z\,; t)$ et $\chi_0' = \chi_0'\ (x, y, z\,; t)$, à l'aide des relations

$$\vec{\chi} = (\lambda + 2\ G)\,\Box_1\vec{\Gamma},\ \vec{\chi}' = (\lambda' + 2\,G')\,\Box_1'\,\vec{\Gamma}', \tag{10}$$

$$\chi_0 = 2(\lambda + 2\ G)\ \mathrm{div}\ \vec{\Gamma} - \vec{R}\cdot\vec{\chi},$$

$$\chi_0' = 2(\lambda' + 2\ G')\ \mathrm{div}\ \vec{\Gamma}' - \vec{R}\cdot\vec{\chi}'. \tag{10'}$$

En tenant compte de (3), on observe que les potentiels vecteurs doivent satisfaire les équations

$$D\vec{\chi} = 0,\ D\vec{\chi}' = 0\,; \tag{11}$$

de même, en utilisant les notations (10), les relations (10′) conduisent aux conditions

$$\begin{aligned} \square_1\chi_0 &= 2\ \mathrm{div}\ \vec{\chi} - \square_1(\vec{R}\cdot\vec{\chi}), \\ \square_1\chi_0' &= 2\ \mathrm{div}\ \vec{\chi}' - \square_1'(\vec{R}\cdot\vec{\chi}'), \end{aligned} \tag{12}$$

qui, en observant la relation

$$\square(\vec{R}\cdot\vec{\chi}) = \vec{R}\cdot\square\vec{\chi} + 2\mathrm{div}\vec{\chi}, \tag{13}$$

valable pour tout opérateur de d'Alembert $\square$, prennent la forme

$$\begin{aligned} \square_1\chi_0 + \vec{R}\cdot\square_1\vec{\chi} &= 0, \\ \square_1'\chi_0' + \vec{R}\cdot\square_1'\vec{\chi}' &= 0. \end{aligned} \tag{12'}$$

L'état de déplacement devient

$$\vec{u} = (G' + \alpha')\,\square_2'\vec{\chi} - \frac{1}{2(\lambda + 2G)}\,D_2'\ \mathrm{grad}\ (\vec{R}\cdot\vec{\chi} + \chi_0) - 2\,\alpha\ \mathrm{rot}\ \vec{\chi}', \tag{14}$$

$$\vec{\Phi} = (G + \alpha)\,\square_2\vec{\chi}' - \frac{1}{2(\lambda' + 2G')}\,D_2\ \mathrm{grad}\ (\vec{R}\cdot\vec{\chi}' + \chi_0') - 2\,\alpha\ \mathrm{rot}\ \vec{\chi}, \tag{14'}$$

tant les potentiels vecteurs que les potentiels scalaires devant être de la classe C^5. Cette représentation est du type de Sternberg-Eubanks.

4°. En particulier, en annulant les dérivées partielles par rapport au temps, on obtient une représentation, correspondant au problème statique, sous la forme

$$\vec{u} = [(G' + \alpha')\,\triangle - 4\alpha]\,\vec{\chi} - \frac{(\lambda + G - \alpha)\,(G' + \alpha')\,\Delta - 4\alpha\,(\lambda + G)}{2(\lambda + 2G')}\ \mathrm{grad}\ (\vec{R}\cdot\vec{\chi}' + \chi_0) - 2\,\alpha\ \mathrm{rot}\ \vec{\chi}', \tag{15}$$

$$\vec{\Phi} = [(G + \alpha]\,\triangle - 4\alpha]\,\vec{\chi}' - \frac{(\lambda' + G' - \alpha')\ (G + \alpha)\ \Delta - 4\alpha\ (\lambda' + G')}{2(\lambda' + 2\ G])}\ \mathrm{grad}\ (\vec{R}\cdot\vec{\chi} + \chi_0') - 2\alpha\ \mathrm{rot}\ \vec{\chi}, \tag{15'}$$

où les potentiels vecteurs $\vec{\chi} = \vec{\chi}\ (x, y, z)$ et $\vec{\chi}' = \vec{\chi}'\ (x, y, z)$ vérifient les équations

$$\Delta(l^2\,\Delta - 1)\ \vec{\chi} = 0,\ \Delta(l^2\Delta - 1)\ \vec{\chi}' = 0 \tag{16}$$

et les potentiels scalaires $\chi_0 = \chi_0(x, y, z)$ et $\chi_0' = \chi_0'(x, y, z)$ sont donnés par

$$\triangle\chi_0 + \vec{R} \cdot \triangle\vec{\chi} = 0, \tag{17}$$

$$\triangle\chi_0' + \vec{R} \cdot \triangle\vec{\chi}' = \frac{1}{h^2}(\chi_0' + \vec{R} \cdot \vec{\chi}'); \tag{17'}$$

on a noté par l une constante élastique, exprimée à l'aide des autres constantes élastiques sous la forme

$$l^2 = \frac{(G + \alpha)(G' + \alpha')}{4G\alpha} \tag{18}$$

et ayant la dimension d'une longueur.

Cette représentation, où tous les potentiels sont de la classe C^5, est du type de Papkovitch-Neuber.

5°. Les représentations données ci-dessus, qui sont toutes des généralisations de la représentation donnée par P. F. Papkovitch et H. Neuber pour le cas statique des corpe élastiques, sont complètes pour un domaine simplement connexe; cette affirmation est basée sur la démonstration qu'on a donné pour la complétitude de la représentation de N. Şandru et sur le fait qu'on est parti de cette représentation et on est arrivé pas à pas aux formules (14), (14'), sans perdre une solution.

Dans le cas d'un domaine multiplement connexe, on doit ajouter des termes supplémentaires.

BIBLIOGRAPHIE

1. H. Neuber: *Ein neuer Ansatz zur Lösung räumlicher Probleme der Elastizitätstheorie. Der Hohlkegel unter Einzellast al. Beispiel.* Z.A.M.M., t. 14, 1934, p. 203.
2. H. Neuber: *On the general solution of linear-elastic problems in anisotropic and isotropic Cosserat continua.* Appl. Mechanics, Proc. XIth Int. Congress Appl. Mech., München, 1964, Springer-Verlag, Berlin /Heidelberg/ New York, 1966, p. 153.
3. W. Nowacki: *Teoria niesymetrycznej sprezystości*, Państ. Wydawn. Naukowe, Warszawa, 1971.
4. P. F. Papkovitch: *Solution générale des équations différentielles fondamentales d'élasticité, exprimée par trois fonctions harmoniques*, C. Rend. hebd. des séances de l'Acad. des Sci., t. 195, 1932, p. 513.
5. E. Sternberg, R. A. Eubanks: *On stress functions for elastokinetics and the integration of the repeated wave equation*, Quart. Appl. Math., t. 15, no. 2, 1957, p. 149.
6. N. Şandru: *On some probléms of the linear theory of the asymmetric elasticity*, Int. J. Engng. Sci., t. 4, no. 1, 1966, p. 81.
7. P. P. Teodorescu: *Sur le problème dynamique des corps du type de Cosserat*, Rev. Roum. de Math. Pures et Appl., t. XVII, no. 7, 1972. p. 1097.

Reçu le 10.XI.1971

Université de Bucarest
Faculté de Mathématique—Mécanique

METODA ENERGETICĂ GENERALIZATĂ

B. ZAINEA

Originea și aprofundarea metodelor energetice sînt legate de numele lui D. Hilbert, R. Courant, K. Friedrichs, S. Sobolev. Trecînd peste lucrările de început ale lui Ritz (1908) și Galerkin (1915), în capitolul VII vol. II al monografiei lui R. Courant și D. Hilbert (1933) „Metodele Fizice Matematice" întîlnim folosirea metodei șirurilor minimalizante pentru demonstrarea existenței soluțiilor problemelor la limită și problemelor relativ la valorile și funcțiile proprii pentru ecuațiile de tip eliptic de ordinul doi. De asemenea mai deducem că metoda șirurilor minimalizante, generalizează metoda lui Ritz, Datorită noțiunilor de: derivată parțială generalizată, a spațiului W_p^l. precum și a teoremelor de scufundare, introduse de S. Sobolev metodele energetice sau variaționale de cercetare a problemelor la limită pentru ecuațiile cu derivate parțiale, au căpătat o interpretare mai riguroasă și mai adîncă. În această lucrare vom generaliza metoda energetică în două sensuri și anume:

a) Vom arăta că anumite metode energetice „clasice" se pot obține ca niște cazuri particulare ale aceste generalizări;

b) Metoda energetică generalizată poate fi aplicată unor operatori diferențiali, cărora nu li se poate aplica metoda energetică „clasică".

1. Fie în spațiul Hilbert **H**, doi operatori liniari **A** și **B**. Domeniile de definiție ale acestor operatori le notăm prin **D** (**A**) respectiv **D** (**B**), iar intersecția lor **D** (**A**) $\cap$ **D** (**B**) prin **D** (**A**, **B**). Să notăm mulțimea {**Au**} prin **R** (**A**) cînd $u \in$ **D**(**A**, **B**) iar mulțimea {**B**u} prin **R**(**B**) cînd $u \in$ **D**(**A**, **B**). Vom presupune că mulțimile **R** (**A**) și **R** (**B**) sînt complete în **H**.

D e f i n i ț i a 1. Operatorul **A** se numește simetric în raport cu operatorul **B**, dacă pentru orice u, $v \in$ **D** (**A**, **B**) are loc egalitatea:

$$(\mathbf{A}u,\ \mathbf{B}v) = (\mathbf{B}u,\ \mathbf{A}v) \tag{1.1}$$

unde prin ( ) vom înțelege produsul scalar în **H**.

D e f i n i ț i a 2. Operatorul **A** se numește pozitiv în raport cu operatorul **B**, dacă sînt îndeplinite relațiile:

$$(,)\ \mathbf{A}u,\ \mathbf{B}u) > 0 \text{ pentru } u \neq 0$$

$$(\mathbf{A}u,\ \mathbf{B}u) = 0 \text{ rezultă } u \| = \| 0 \tag{1.2}$$

unde $\| \ \|$ înseamnă norma unui element din **H**, iar $u \in D$ (**A**, **B**)

T e o r e m a 1. Dacă operatorul **A** este simetric în raport cu operatorul **B**. atunci operatorul **A** este pozitiv în raport cu operatorul **B**.

D e m o n s t r a ţ i e

Prin ipoteză $(\mathbf{A}u, \mathbf{B}v) = (\mathbf{B}u, \mathbf{A}v)$. Să arătăm că pentru x şi y reali $(\mathbf{A}x, \mathbf{B}y) = (\mathbf{A}y, \mathbf{B}x)$ adică produsul scalar este real.

Să punem $u = v$. Atunci $(\mathbf{A}u, \mathbf{B}u) = \overline{(\mathbf{B}u, \mathbf{A}u)}$ Fie $u = x + iy$. Atunci:

$$(\mathbf{A}u, \mathbf{B}u) = (\mathbf{A}x, \mathbf{B}x) + (\mathbf{A}y, \mathbf{B}y) + \mathrm{i}\,\{(\mathbf{A}y, \mathbf{B}x) - (\mathbf{A}x, \mathbf{B}y)\}$$

$$(\mathbf{B}u, \mathbf{A}u) = (\mathbf{A}x, \mathbf{B}x) + (\mathbf{A}y, \mathbf{B}y) - \mathrm{i}\,\{(\mathbf{A}y, Bx) - (\mathbf{A}x, \mathbf{B}y)\}$$

de underezultă $2\,(\mathbf{A}y, \mathbf{B}x) = 2\,(\mathbf{A}x, \mathbf{B}y)$ sau:

$$(Ay, \mathbf{B}x) = (\mathbf{A}x, \mathbf{B}y) \tag{1.3}$$

2. Fie de rezolvat ecuaţia:

$$\mathbf{A}u = f \tag{2.1}$$

în anumite condiţii la limită

Să presupunem că operatorul A este pozitiv în raport cu operatorul **B**. Construim funcţionala:

$$F(u) = (\mathbf{A}u, \mathbf{B}u) - (\mathbf{B}u, f) - (f, \mathbf{B}u) \tag{2.2}$$

T e o r e m a 2. Aflarea soluţiei exacte a ecuaţiei (2.1) şi aflarea minimului funcţionalei (2.2) sînt probleme echivalente.

D e m o n s t r a ţ i e. Să presupunem că $u_0 \in \mathbf{D}(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ este soluţia ecuaţiei (2.1), adică $\mathbf{A}u_0 - f \equiv 0$. Să arătăm că $\mathbf{F}(u)$ pentru $u = u_0$ are cea mai mică valoare.

Fie $v \in \mathbf{D}(\mathbf{A}, \mathbf{B})$, atunci $v - u_0 \in \mathbf{D}(\mathbf{A}, \mathbf{B})$. Să punem $v - u_0 = \eta$ Să calculăm $F(v) = F\,(u_0 + \eta)$ găsim:

$$\mathbf{F}(v) = \{(\mathbf{A}u_0, \mathbf{B}u_0) - \mathbf{B}u_0, f) - (f, \mathbf{B}u_0)\} + (\mathbf{A}\eta, \mathbf{B}\eta) + (\mathbf{A}u_0 - f, \mathbf{B}\eta) + (\mathbf{A}\eta, \mathbf{B}u_0) - (\mathbf{B}\eta, f).$$

În baza teoremei 1, $(\mathbf{A}\eta, \mathbf{B}u_0) = (\mathbf{B}\eta, \mathbf{A}u_0)$ şi deci

$$(\mathbf{A}\eta, \mathbf{B}u_0) - (\mathbf{B}\eta, f) = (\mathbf{B}\eta, \mathbf{A}u_0) - (\mathbf{B}\eta, f) = (\mathbf{B}\eta, \mathbf{A}u_0 - f)$$

Cu aceasta $\mathbf{F}(v)$ devine:

$$\mathbf{F}(v) = \mathbf{F}(u) + (\mathbf{A}\eta, \mathbf{B}\eta) + (\mathbf{A}u_0 - f, \mathbf{B}\eta) + (\mathbf{B}\eta, \mathbf{A}u_0 - f)$$

Prin ipoteză $\mathbf{A}u_0 - f \equiv 0$, deci $\mathbf{F}(v) = \mathbf{F}(u) + (\mathbf{A}\eta, \mathbf{B}\eta)$ Cum $(\mathbf{A}\eta, \mathbf{B}\eta) \geqslant 0$ deoarece **A** este pozitiv în raport cu **B**, rezultă $\mathbf{F}(v) \geqslant \mathbf{F}(u_0)$ adică funcţionala (2.2) iar pentru $u = u_0$ cea mai mică valoare.

Reciproc să presupunem că $U_0 \in \mathbf{D}(\mathbf{A}, \mathbf{B})$, realizează minimul funcţionalei (2.2). Să arătăm că u_0 este soluţie exactă a ecuaţiei (2.1), adică $\mathbf{A}u_0 - f \equiv 0$.

Fie $\eta \in \mathbf{D}(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ şi λ un număr real; vom avea şi $u_0 + \lambda\eta \in \mathbf{D}(\mathbf{A}, \mathbf{B})$

Prin ipoteză $\mathbf{F}(u_0) \leqslant \mathbf{F}(u_0 + \lambda\eta)$ sau $\mathbf{F}(u_0 + \lambda\eta) - \mathbf{F}(u_0) \geqslant 0$

Dar:

$$\mathbf{F}(u_0 + \lambda\eta) - \mathbf{F}(u_0) = \lambda^2(\mathbf{A}\eta, \mathbf{B}\eta) + \lambda\{(\mathbf{A}u_0 - f, \mathbf{B}\eta) + (\mathbf{B}\eta, \mathbf{A}u_0 - f)\}$$

Sau:

$$\lambda^2(\mathbf{A}\eta,\ \mathbf{B}\eta) + 2\lambda\, \mathbf{R}e(\mathbf{A}u_0 - f,\ \mathbf{B}\eta) \geqslant 0$$

Aceasta este posibil dacă:

$$\{\mathbf{R}e(\mathbf{A}u_0 - f,\ \mathbf{B}\eta)\}^2 \leqslant 0$$

de unde deducem:

$$\mathbf{R}e(\mathbf{A}u_0 - f,\ \mathbf{B}\eta) = 0$$

Schimbînd η cu $i\eta$, același raționament ne conduce la $\mathbf{I}m.\ (\mathbf{A}u_0 - f,\ \mathbf{B}\eta) = 0$. Ambele rezultate sînt echivalente cu: $(\mathbf{A}u_0 - f,\ \mathbf{B}\eta) = 0$. Rezultă că elementul $\mathbf{A}u_0 - f$ este ortogonal pe toate elementele $\mathbf{R}(\mathbf{B})$, deci nu poate fi decît elementul nul, deci

D e f i n i ț i a 3. Vom numi metodă energetică generalizată, metoda prin care aflarea soluției ecuației (2.1) se înlocuiește cu metoda aflării minimului funcționalei (2.2).

În anumite cazuri particulare metoda energetică coincide cu unele metode energetice cunoscute și anume:

I. Dacă operatorul **A** este simetric în raport cu operatorul **B**, iar **B** este operatorul identic, $\mathbf{B} \equiv \mathbf{E}$ atunci $\mathbf{B}u = u$ și operatorul A devine simetric și pozitiv în sens obișnuit. Funcționala (2.2) devine:

$$\mathbf{F}(u) = (\mathbf{A}u,\ u) - (u,\ f) - (f,\ u) \tag{2.3}$$

Funcționala (2.3) este funcționala construită de K. Friedrichs. În acest caz metoda energetică generalizează coincide cu metoda energetică [1]*. Construcția aproximativă a elementului U_0 care realizează minimul funcționalei (2.3) se realizează prin metoda lui Ritz.

II. Dacă operatorul $\mathbf{B} \equiv \mathbf{A}$ atunci funcționala (2.2) devine:

$$\mathbf{F}(u) = (\mathbf{A}u,\ \mathbf{A}u) - (\mathbf{A}u,\ f) - (f,\ \mathbf{A}u) \tag{2.4}$$

sau:

$$\mathbf{F}(u) = (\mathbf{A}u - f,\ \mathbf{A}u - f) - (f,\ f) \tag{2.5}$$

Dacă notăm:

$$(\mathbf{A}u - f,\ \mathbf{A}u - f) = \|\mathbf{A}u - f\|^2;\ (f,\ f) = \|f\|^2 \tag{2.6}$$

și:

$$\Phi(u) = \mathbf{F}(u) + \|f\|^2 \tag{2.7}$$

rezultă că:

$$\Phi(u) = \|\mathbf{A}u - f\|^2 \tag{2.8}$$

Însă: $\min \Phi(u) = \min. \{\mathbf{F}(u) + \|f\|^2\} = \min. \mathbf{F}(u)$ dacă facem abstracție de factorul constant $\|f\|^2$

* Pag. 69

Dar aflarea minimului funcționalei $\Phi(u)$ coincide cu metoda celor mai mici pătrate [1] *.

III. Dacă operatorul **A** este semimărginit, atunci pentru rezolvarea ecuației (2.1) nu se poate utiliza nici una din metodele energetice cunoscute. În acest caz metoda energetică generalizată este eficace. În adevăr să notăm cu $\mathbf{F}_{\mathbf{K}\cdot\mathbf{F}}$ funcționala (2.3) și cu $\mathbf{F}_{\mathbf{M}\cdot\mathbf{P}}$ funcționala (2.5). Dacă **A** este un operator semimărginit inferior:

$$m(u, u) \leqslant (\mathbf{A}u, u) \tag{2.9}$$

acest fapt este echivalent cu faptul că operatorul $\mathbf{A} - m\mathbf{E}$ este pozitiv în sens obișnuit. Dacă **A** este un operator semimărginit superior:

$$(\mathbf{A}u, u) \leqslant \mathbf{M}(u, u) \tag{2.10}$$

rezultă că operatorul **ME** — **A** este pozitiv în sens obișnuit. Să notăm cu **B** operatorii $\mathbf{A} - m\,\mathbf{E}$ și respectiv **ME** — **A**. Funcționala (2.2) devine respectiv:

$$\mathbf{F}(u) = \mathbf{F}_{\mathbf{M}\cdot\mathbf{P}} - m\,\mathbf{F}_{\mathbf{K}\cdot\mathbf{F}}$$

$$\mathbf{F}(u) = \mathbf{M}\,F_{\mathbf{K}\cdot\mathbf{F}} - \mathbf{F}_{\mathbf{M}\cdot\mathbf{P}} \tag{2.11}$$

Deci minimul funcționalelor (2.11) este respectiv:

$$\min \cdot F_{\mathbf{M}\cdot\mathbf{P}} - m\,\{\min \cdot \mathbf{F}_{\mathbf{K}\cdot\mathbf{F}}\}$$

$$\mathbf{M}\,\{\min \cdot \mathbf{F}_{\mathbf{K}\cdot\mathbf{F}}\} - \min \cdot \mathbf{F}_{\mathbf{M}\cdot\mathbf{P}} \tag{212}$$

3. Să ne ocupăm de soluția ecuației (2.1) cu ajutorul metodei energetice generalizate.

Fie dat un spațiu Hilbert H real și complet. Pe mulțimea liniară $\mathbf{D}(\mathbf{A})$ densă în H se dă ecuația:

$$\mathbf{A}u = f;\ u \in \mathbf{D}(\mathbf{A});\ f \in \mathbf{H} \tag{3.1}$$

unde **A** este un operator liniar (aditiv și omogen) pe $\mathbf{D}(\mathbf{A})$.

Fie un operator **B** liniar, definit pe $\mathbf{D}(\mathbf{B})$ cu proprietatea $\mathbf{B}u \in \mathbf{H}$, dacă $u \in \mathbf{D}(\mathbf{B})$. Presupunem că $\mathbf{D}(\mathbf{B})$ este densă în H.

Să notăm $\mathbf{D}(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = \mathbf{D}(\mathbf{A}) \cap \mathbf{D}(\mathbf{B})$

Să presupunem că operatorul **A** este pozitiv în raport cu operatorul **B** adică:

$$(\mathbf{A}u, \mathbf{B}u) \geqslant 0;\ u \in \mathbf{D}(\mathbf{A}, \mathbf{B}) \tag{3.2}$$

Teorema 3. Dacă **A** este pozitiv în raport cu operatorul **B**, atunci soluția ecuației (4.1) este unică.

În adevăr, dacă u_1 și u_2 sînt două soluții diferite vom avea:

$$\mathbf{A}u_1 \equiv f;\ \mathbf{A}u_2 \equiv f \text{ sau } \mathbf{A}v \equiv 0;\ v = u_1 - u_2$$

Produsul scalar $(\mathbf{A}v, \mathbf{B}v) = 0$; acest lucru este posibil numai dacă $v \equiv 0$, de unde deducem $u_1 = u_2$

* Pag. 337

D e f i n i ţ i a 4. Operatorul **A** se numeşte pozitiv definit în raport cu operatorul **B** dacă:

$$(\mathbf{A}u, \mathbf{B}u) \geqslant \gamma^2 \, \| \mathbf{B}u \|^2 ; \; \gamma > 0 ; \; u \in \mathbf{D}(\mathbf{A}, \mathbf{B}) \tag{3.3}$$

Pe elementele mulţimii **D**(**A**, **B**) definim următoarele produse scalare:

$$(u. \, v)_A = (\mathbf{A}u, \mathbf{A}v) ; \; (u, v)_B = (\mathbf{B}u, \mathbf{B}v) \tag{3.4}$$

Se probează uşor că aceste produse verifică axiomele produsului scalar. Adăugînd la mulţimea elementelor **D**(**A**, **B**) elementele limită după metrică (3,4), obţinem spaţii Hilbert complete pe care le vom nota $\mathbf{H}_A$ şi $\mathbf{H}_B$. Normele elementelor acestor spaţii le definim după formulele:

$$\| u \|_A = \sqrt{(u, u)_A} ; \; \| u \|_B = \sqrt{(u, u)_B} \tag{3.5}$$

Relaţia (3.3) este echivalentă cu următoarea:

$$\| U \|_A \geqslant \gamma \, \| u \|_B ; \; \gamma > 0 \tag{3.6}$$

Să demonstrăm existenţa soluţiei ecuaţiei (3.1). După formula Cauchy-Boniacovski există relaţia:

$$|(f, \mathbf{B}u)| \leqslant \| f \| \, \| u \|_B \tag{3.7}$$

şi avînd în vedere relaţia (4.6)

$$|(f, \mathbf{B}u)| \leqslant \frac{\| f \|}{\gamma} \| u \|_A \tag{3.8}$$

Rezultă că funcţionala $(f, \mathbf{B}u)$ este mărginită în $\mathbf{H}_A$.
Analog şi funcţionala $(\mathbf{B}u, f)$ este mărginită în $\mathbf{H}_A$ Conform teoremei lui Riesz există un element unic u_0 în $\mathbf{H}_A$, cu ajutorul căruia funcţionala $(f, \mathbf{B}u)$ se poate prezenta sub forma:

$$(f, \mathbf{B}u) = (u, u_0)_A \tag{3.9}$$

Deci funcţionala (2.2) este definită în $\mathbf{H}_A$ şi devine:

$$\mathbf{F}(u) = (u, u)_A - (u, u_0)_A - (u_0 \, u)_A = (u - u_0, u - u_0)_A - (u_0, u_0)_A$$

sau:

$$\mathbf{F}(u) = \| u - u_0 \|_{\mathbf{A}}^2 - \| u_0 \|_{\mathbf{A}}^2 \tag{3.10}$$

min. $F(u) = - \| u_0 \|_{\mathbf{A}}^2$ pentru $u = u_0$ şi conform teoremei 2, u_0 este soluţia exactă a ecuaţiei (3.1).

Elementul u_0 poate să nu aparţină lui **D**(**A**, **B**), dar există în extinderea domeniului de definiţie, adică în $\mathbf{H}_A$. Soluţia u_0 care nu aparţine lui **D**(**A**, **B**) dar aparţine lui $\mathbf{H}_A$ se numeşte soluţie generalizată.

În ipoteza că $\mathbf{H}_A$ este separabil se poate construi soluţia problemei variaţionale în modul următor:

Alegem $\{\varphi_n\}$ un șir ortonormat și complet în $\mathbf{H}_A$

$$(\varphi_n, \varphi_m)_A = \begin{cases} 1 & n = m \\ 0 & n \neq m \end{cases} \tag{3.11}$$

Pentru construcția elementului u_0 care realizează minimul funcționalei (4.10) luăm:

$$u_0 = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k \tag{3.12}$$

unde constantele α_k sînt în general complexe. Constantele α_k se determină din condiția $\mathbf{F}(u_0) =$ minim.

Sau:

$$\mathbf{F}(u_0) = \sum_{k,j} (\mathbf{A}\alpha_k\varphi_k, \mathbf{B}\alpha_j\varphi_f) - \sum_j (f, \mathbf{B}\alpha_j\varphi_j) - \sum_j (\mathbf{B}\alpha_j\varphi_j, f) = \text{minim}$$

Sau:

$$\mathbf{F}(u_0) = \sum_{k,j} \alpha_k\bar{\alpha}_j(\mathbf{A}\varphi_k, \mathbf{B}\varphi_j) - \sum_j \bar{\alpha}_j(f, \mathbf{B}\varphi_l) - \sum_j \alpha_j(\mathbf{B}\varphi_j, f) = \text{minim}$$

Dacă $\alpha_k = a_k + ib_k$, $\mathbf{F}(u_0)$ devine minim dacă:

$$\frac{\partial \mathbf{F}(u_0)}{\partial a_k} = 0\,; \frac{\partial \mathbf{F}(u_0)}{\partial b_k} = 0 \tag{3.13}$$

Relațiile (3.13) sînt echivalente cu ecuația:

$$\frac{\partial \mathbf{F}(u_0)}{\partial a_k} + i\,\frac{\partial \mathbf{F}(u_0)}{\partial b_k} = 0 \tag{3.14}$$

adică:

$$\frac{\partial \mathbf{F}(u_0)}{\partial \bar{\alpha}_k} = 0 \tag{3.15}$$

Relația (3.15) este echivalentă cu:

$$\sum_j \alpha_k(\mathbf{A}\varphi_k, \mathbf{B}\varphi_f) = \sum_j (f, \mathbf{B}\varphi_j) \tag{3.16}$$

sau:

$$\sum_j \alpha_k(\varphi_k, \varphi_j)_A = \sum_j (f, \varphi_f)_A$$

Cu relația (3.11) obținem:

$$\alpha_k = (f, \varphi_k)_A = (f, \mathbf{B}\varphi_k) \tag{3.17}$$

Relația (3.12) devine:

$$u_0 = \sum_{k=1}^{n} (f, \mathbf{B}\varphi_k)\varphi_k \tag{3.18}$$

Soluția ecuației (3.1) prezentată sub forma (3.18) reprezintă un segment al soluției aproximative. Soluția căutată va fi:

$$u_0 = \sum_{k=1}^{\infty} (f, \mathbf{B}\varphi_k)\varphi_k \tag{3.19}$$

Modul de construcție al soluției aproximative este o generalizare a metodei lui Ritz și o vom numi metoda generalizată a lui Ritz. Condiția suficientă pentru existența operatorului **B** este dată de următoarea teoremă [2].

Dacă **D**(**A**) și **R**(**A**) sînt complete în **H** și pentru un oarecare element nenul $f_0 \in \mathbf{H}$ soluția ecuației $\mathbf{A}u = f_0$ există și este unică, atunci:

a) există un operator **B**, astfel ca operatorul **A** să fie pozitiv în raport cu **B**:

b) operatorul **B** se prezintă în forma:

$$\mathbf{B} = (\mathbf{A})^{-1}\,\mathbf{C}$$

unde **C** este un operator arbitrar pozitiv ln sens obișnuit cu $\mathbf{D}(\mathbf{C}) \supseteq \mathbf{D}(\mathbf{A})$

4. Din lucrările lui S. G. Mihlin se deduce că metoda energetică se aplică numai ecuațiilor diferențiale de ordin par. Ne propunem să arătăm că metoda energetică generalizată se poate aplica și ecuațiilor diferențiale de ordin impar.

Fie ecuația diferențială:

$$\mathbf{A}u = f \tag{4.1}$$

unde:

$$\mathbf{A}u = \sum_{k=0}^{l-1} (-1)^k \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}\left[a_{k+1}(x)\frac{d^{k+1}u}{\mathrm{d}x^{k+1}}\right]; l = \frac{n+1}{2}\ ;\ \text{n impar.} \tag{4.2}$$

Se cere soluția ecuației (4.1) pentru condițiile la limită:

$$u(a) = u'(a) = \ldots = u^{(l-1)}(a) = 0$$

$$u(b) = u'(b) = \ldots = u^{(l-1)}(b) = 0 \tag{4.3}$$

Vom presupune că funcțiunile $a_k(\tau)$ sînt nenegative, continui și derivabile de un număr suficient de ori pe $[a, b]$

Să notăm cu **D**(**A**) mulțimea funcțiunilor $u(x) \in \mathbf{C}^{(n)}[a, b]$ și care îndeplinesc condițiile la limită (4.3). Mulțimea **D** (**A**) este densă în $\mathbf{H} = L_2$ $[a,b]$

Ca operator **B** să luăm $\mathbf{B}u = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$. Să arătăm că pe **D**(**A**) operatorul **A** este pozitiv definit în raport cu operatorul **B** și conform relației (3.10), ecuația (4.1) admite o soluție și această soluție este unică. Ne propunem deci să calculăm produsul scalar $(\mathbf{A}u, \mathbf{B}u)$

$$(\mathbf{A}u, \mathbf{B}u) = \int_a^b \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\cdot\sum_{k=0}^{l-1}(-1)^k\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}\left[a_{k+1}(x)\frac{\mathrm{d}_U^{k+1}}{\mathrm{d}x^{k+1}}\right]\mathrm{d}x =$$

$$= \sum_{k=0}^{l-1}(-1)^k\int_a^b \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\cdot\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}\left[a_{k+1}(x)\frac{\mathrm{d}_U^{k+1}}{\mathrm{d}x^{k+1}}\right]$$

Integrînd odată prin părți obținem:

$$(\mathbf{A}u,\ \mathbf{B}u) = \sum_{k=0}^{l-1} (-1)^k \left\{ u' \frac{\mathrm{d}^{k-1}}{\mathrm{d}x^{k-1}} \left[a_{k+1}(x) \frac{\mathrm{d}_U^{k+1}}{\mathrm{d}x^{k+1}} \right] \right\}_a^b -$$

$$- \sum_{k=0}^{l-1} (-1)^k \int_a^b \frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}x^2} \frac{\mathrm{d}^{k-1}}{\mathrm{d}x^{k-1}} \left[a_{k+1}(x) \frac{\mathrm{d}_U^{k+1}}{\mathrm{d}x^{k+1}} \right] \mathrm{d}x$$

Integrînd din nou prin părți integrala:

$$\int_a^b \frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}x^2} \cdot \frac{\mathrm{d}^{k-1}}{\mathrm{d}x^{k-1}} \left[a_{k+1}(x) \frac{\mathrm{d}^{k+1} u}{\mathrm{d}x^{k+1}} \right] \mathrm{d}x \text{ obținem:}$$

$$\left\{ u'' \frac{\mathrm{d}^{k-2}}{\mathrm{d}x^{k-2}} \left[a_{k+1}(x) \frac{\mathrm{d}^{k+1} u}{\mathrm{d}x^{k+1}} \right] \right\}_a^b - \int_a^b \frac{\mathrm{d}^3 u}{\mathrm{d}x^3} \frac{\mathrm{d}^{k-2}}{\mathrm{d}x^{k-2}} \left[a_{k+1}(x) \frac{\mathrm{d}^{k+1} u}{\mathrm{d}x^{k+1}} \right] \mathrm{d}x$$

Continuînd integrarea prin părți, după k integrări se ajunge la, dacă avem în vedere și condițiile la limită (4.3)

$$(\mathbf{A}u,\ \mathbf{B}u) = \sum_{k=0}^{l-1} (-1)^{2k} \int_a^b a_{k+1}(x) \left(\frac{\mathrm{d}^{k+1} u}{\mathrm{d}x^{k+1}} \right)^2 \mathrm{d}x = \int_a^b \left\{ \sum_{k=0}^{l-1} a_{k+1}(x) \left(\frac{\mathrm{d}^{k+1} u}{\mathrm{d}x^{k+1}} \right)^2 \right\} \mathrm{d}x$$

O sumă de termeni pozitivi (deoarece funcțiile $a_k(x)$ sînt nenegative) este mai mare decît unul din termeni, de exemplu ultimul

$$\sum_{k=0}^{-1} a_{k+1}(x) \left(\frac{\mathrm{d}^{k+1} u}{\mathrm{d}x^{k+1}} \right)^2 \geqslant a_l(x) \left(\frac{\mathrm{d}^l u}{\mathrm{d}x^b} \right)^2$$

Dacă $a_0 = \min \cdot a_l(x)$ cînd $x \in [a,\ b]$; $a_0 > 0$ atunci

$$\int_a^b \left\{ \sum_{k=0}^{l-1} a_{k+1}(x) \left(\frac{\mathrm{d}^{k+1} u}{\mathrm{d}x^{+1}} \right)^2 \right\} \mathrm{d}x \geqslant \int_a^b a_l(x) \left(\frac{\mathrm{d}^l u}{\mathrm{d}x^l} \right)^2 \mathrm{d}x \geqslant a_0 \left(\frac{\mathrm{d}^l u}{\mathrm{d}x^l} \right)^2 \mathrm{d}x = a_0 \| u^{(l)} \|^2$$

Deci

$$(\mathbf{A}u,\ \mathbf{B}u) \geqslant a_0 \| u^{(l)} \|^2$$

Să stabilim acum inegalitatea:

$$\| u^{(l)} \| \leqslant \frac{b-a}{\sqrt{2}} \| u^{(l+1)} \|$$

Să notăm $u^{(l)}(x) = h(x)$. Conform condițiilor (4.3), $h(a) = 0$

Atunci

$$h(x) = \int_a^x h'(t)\ \mathrm{d}t$$

Sau

$$h^2(x) = \left\{ \int_a^x h'(t)\ \mathrm{d}t \right\}^2$$

În inegalitatea lui Cauchy-Buniacovski:

$$\left\{\int_a^x h, (t)h_2(t)\,dt\right\}^2 \leqslant \int_a^x h_1^2(t)dt \int_a^x h_2^2(t)\,dt$$

Să punem: $h_1(t) = h'(t)$; $h_2(t) = 1$ atunci:

$$\int_a^x h_2^2(t)\,dt = \int_x^a dt = x - a$$

Inegalitatea devine:

$$\left\{\int_a^x h'(t)\,dt\right\}^2 \leqslant (x-a)\int_a^x h'^2(t)\,dt$$

Sau

$$h^2(x) \leqslant (x-a)\int_a^x h'^2(t)\,dt \leqslant (x-a)\int_a^b h'^2(t)\,dt$$

Dar

$$\int_a^b h'^2(t)\,dt = \| h' \|^2$$

Deci

$$h^2(x) \leqslant (x-a)\,\| h' \|^2$$

Să integrăm în intervalul (a, b) inegalitatea de mai sus

$$\int_a^b h^2(x)\,dx \leqslant \| h' \|^2 \int_a^b (x-a)\,dx = \|h'\|^2 \frac{(b-a)^2}{2}$$

Cum:

$$\int_a^b h^2(x)\,dx = \| h \|^2$$

Rezultă că:

$$\| h \|^2 \leqslant \frac{(b-a)^2}{2} \| h' \|^2$$

Sau:

$$\|h\| \leqslant \frac{b-a}{\sqrt{2}} \| h' \| \text{ de unde:}$$

inegalitatea

$$\| u^{(l)} \| \leqslant \frac{b-a}{\sqrt{2}} \| u^{(l+1)} \|$$

Conform acestei inegalităţi:

$$\| u^{(l)} \| \geqslant \left(\frac{\sqrt{2}}{b-a}\right)^{l-1} \| u' \|$$

Însă

$$\| u' \| = \| \mathbf{B}u \|$$

Atunci:

$$(\mathbf{A}u,\ \mathbf{B}u) \geqslant a_0 \left(\frac{\sqrt{2}}{b-a}\right)^{l_2-2} \| \mathbf{B}u \|^2$$

Dacă notăm:

$$\gamma = \sqrt{a_0} \left(\frac{\sqrt{2}}{b-a}\right)^{l-1}$$

Am stabilit că:

$$(\mathbf{A}u,\ \mathbf{B}u) \geqslant \gamma^2 \| Bu \|^2$$

adică inegalitatea (3.3).

Deci operatorul **A** este pozitiv definit în raport cu operatorul **B**, deci operatorului **A** i se poate aplica metoda energetică generalizată pentru construcţia soluţiei aproximative a ecuaţiei (4.1)

BIBLIOGRAFIE

1. С. Г. МИХЛИН *Прямые методы в математической физике*. Москва, 1950 г.
2. В. М. ШАЛОВ *Решение несамосопряженных у равнений вариационым методом*. Доклад Академии Наук. 1963 г. Том 151 № 3.

ОБОБЩЕНИЕ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ

Краткое содержание

В этой работе представляется обобщение энергетического метода К. Фридрикса.

Этот метод содержит для некоторых частных случаев классический энергетический метод и также и метод наименьших квадратов.

Кроме этого, этот метод может быть использован для линейных полуограниченных операторов и для дифференциальных операторов нечетного ранга.

ASUPRA ACȚIUNII UNUI GRUP CARE SE DEZVOLTĂ DUPĂ UN ȘIR DE VARIABILE COMPLET ÎNLĂNȚUITE

V. ZLĂTESCU

În lucrarea (1), A Study of group action, de D. G. Hays și R. R. Bush, se consideră un proces de învățare care se aplică la un număr K de indivizi pe baza principiului majorității.

Presupunînd că există posibilitatea alegerii a două alternative A_1 și A_2, fie p_n probabilitatea la experiența de rangul n de a alege A_1 pentru un individ. Admitem că distribuțiile de probabilitate pentru cei K indivizi sînt independente între ele. Atunci, cu probabilitatea

$$1 - A(p_n) = \sum_{\alpha=0}^{\left[\frac{K}{2}\right]+1} C_K^{\alpha} p_n^{\alpha} \cdot q_n^{K-\alpha} \tag{1}$$

unde $\left[\frac{K}{2}\right]$ reprezintă cel mai mare întreg cuprins în $\frac{K}{2}$, iar $q_n = 1 - p_n$. întregul grup de K indivizi alege pe A_2, iar cu probabilitatea

$$A(p_n) = \sum_{\alpha=\left[\frac{K}{2}\right]+1}^{K} C_K^{\alpha} p_n^{\alpha} \cdot q_n^{K-\alpha} \tag{2}$$

se alege A_1. Cu alte cuvinte, dacă pentru majoritatea indivizilor a ieșit A_i $(i = 1, 2)$, această valoare este aleasă de toți indivizii. În cntinuare, procesul se desfășoară după un lanț (OM) simplu, omogen.

Dacă în proba n, probabilitatea alegerii lui A_1 este p_n, probabilitatea alegerii lui A_1 în proba $n + 1$ știind că în proba n a ieșit A_1, este dată de relația:

$$p_{n+1} = \alpha p_n \tag{3}$$

unde α satisface condiția $0 < \alpha < 1$.

De asemenea, notînd q_n, probabilitatea ca în proba n să fie aleasă alternativa A_2, știind că în acastă probă a ieșit efectiv A_2, probabilitatea de a obține în proba $n + 1$ tot A_2 este:

$$q_{n+1} = \alpha q_n \tag{4}$$

Relațiile (3) și (4) definesc un lanț simplu linear cu legături complete, pentru care operatorii care definesc funcțiile de trecere sînt respectiv:

$$T_{1p} = \alpha_p$$

$$T_{2p} = \alpha p + 1 - \alpha$$

Față de cazul α, definit de R. Bush și F. Mosteller [1], în care operatorii sînt:

$$T_{1p} = \alpha p + \lambda(1 - \alpha)$$

$$T_{2p} = \alpha p + \mu(1 - \alpha)$$

în lucrarea citată sînt considerați operatorii corespunzători valorilor $\lambda = 0$, $\mu = 1$, adică se consideră un proces de învățare pentru care probabilitatea obținerii pentru $n \to \infty$ a răspunsului A_1 este 1.

Acest proces particular poate conduce la o generalizare interesantă a lanțurilor (OM).

Într-un cîmp complet de probabilitate $(E, \mathfrak{K}, P)$, considerăm un șir de variabile aleatoare $X_n(\omega)$, $n \in N$, care pot lua valorile a_i, $i \in I_{m+1} = \{1, 2, \ldots, m + 1\}$ cu următoarele probabilități condiționate:

a) pentru $n = 1$.

$$P(X_1 = \omega) = A_i(\bar{p}), \quad i \in I_{m+1}$$

unde $\bar{p} = (p_1, p_2, \ldots, p_m)$ este un punct în domeniul Δ din R^m, definit prin:

$$(\Delta)\ 0 \leqslant p_i \leqslant 1, \quad i \in I_m$$

$$\sum_{i \in I_{m+1}} A_i(\bar{p}) = 1, \quad A_i(\bar{p}) \geqslant 0$$

$A_1(\bar{p}), A_2(\bar{p}), \ldots, A_{m+1}(\bar{p})$, fiind funcții date de $\bar{p}$.

b) pentru $n > 2$, introducem notația:

$$P(X_n = a_{jn}, X_{n-1} = a_{j_{n-1}}, \ldots, X_1 = a_{j1}) = p_{j_1, j_2, \ldots, j_{n-1}, j_n}, \ (j_1, j_2, \ldots, j_n \in I_{m+1})$$

Considerăm funcțiile reale de $\bar{p}$, definite prin relațiile:

$$q_{j_1 j_2 \ldots, jn-1, jn}(\bar{p}) = \varphi_{jn-1 jn} \bar{q}_{j_1, j_2, \ldots, j_{n-2}}(\bar{p}), \quad (j_1, j_2, \ldots, j_n \in I_{m+1})$$

unde:

1° $q_{j_1, j_2 \ldots, jn-1, j_n}(\bar{p}) \geqslant 0$

2° $\sum_{jn \in Im+1} q_{j_1, j_2, \ldots j_{n-1}\ j_n}(\bar{p}) = 1, \quad (\forall j_1, j_2 \ldots jn-1 \in I_{m+1})$

3° $\varphi_{jn-1, j_n}(\bar{q}) \geqslant 0, \qquad \forall\, \bar{q} \in \Delta,\ j_{n-,j1_n} \in I_{m+1}$

$\sum_{j_n \in I_{m+1}} \varphi_{jn-1, ju}(\bar{q}) = 1, \qquad \forall\, \bar{q} \in \Delta,\ j_n \in I_{m+1}$

iar funcţiile reale $\varphi_{ij}(\bar{q})$ sînt date.

4° $\bar{q}_{j_1, j_2 \ldots, j_n-2}(\bar{p})$ este vectorul

$$\{q_{j_1, j_2, \ldots, j_n-2, 1}(\bar{q}),\ q_{j_1, j_2, \ldots, j_n-2, 2}(\bar{p}), \ldots, q_{j_1, j_2, \ldots, j_n-2, m+1}(\bar{p})\}$$

5° $q_{j_1} = p_{j_1} \quad \forall\, j_1 \in I_{m+1}$

$$q_{j_1, j_2} = \varphi_{j_1, j_2}(\bar{p}), \quad \forall j_1, j_2 \in I_{m+1}.$$

Prin definiţie:

$$p_{j_1, j_2, \ldots, j_{n-1}, j_n} = A_{ju}[\bar{\varphi}_{j_n-1}[\bar{q}_{j_1, j_2, \ldots, j_n-2}]], \forall j_1, j_2, \ldots, j_{n-1}, j_n \in I_{m+1} \tag{6}$$

iar

$$\bar{\varphi}_{j_n-1}(\bar{q}_{j_1, \ldots, j_n-2}) = \{\varphi_{j_n-1,1}(\bar{q}_{j_1, \ldots, j_n-2}),\ \varphi_{ju-1,2}[\bar{q}_{j_1, \ldots, j_n-2}],\ \varphi_{j_n-2}\ \bar{q}_{j \ldots, j_n-2})$$

Relaţiile (6) definesc un sistem cu legături complete (2), care generalizează lanţurile (OM), (3), care se obţin în cazul particular cînd

$$A_j(\bar{p}) = p_j,\ j \in I_{m+1}.$$

Lanţul definit prin (6) este determinat prin cunoaşterea funcţiilor $A_i(\bar{p})$, $\varphi_{ij}(\bar{p})$, $i, j \in I_{m+1}$, precum şi prin vectorul iniţial $\bar{p} \in \Delta$.

2. Probabilitatea totală

$$P_i^{(n)}(\bar{p}) = P(X_n = a_i),\ i \in I_{m+1}$$

se poate calcula în funcţie de datele iniţiale ale lanţului $\bar{p} \in \Delta$ şi de funcţiile $A_i(\bar{p})$, $\varphi_{ij}(\bar{p})$, $i, j \in I_{m+1}$.

Să considerăm în acest scop, transformarea $T_j\bar{p} : \Delta \to \Delta$ $j \in I_{m+1}$, $\bar{p} \in \Delta$, definită prin

$$p'_k = \varphi_{jk}(\bar{p}),\ k \in I_m$$

Avem:

$$P_i^{(n)}(\bar{p}) = \sum_{j_1, j_2, \ldots, j_{n-1} \in I_m+1} A_{j_1}(\bar{p})\, A_{j_2}(T_{j_1}\bar{p}) \ldots, A_{j_{n-1}}(T_{j_1, j_2, \ldots, j_{n-2}}\bar{p}) \cdot A_i(T_{j_1, j_2, \ldots, j_{n-1}}\bar{p}), \tag{7}$$

unde prin $T_{ij}\bar{p}$ înţelegem aplicarea consecutivă a transformărilor $T_i\bar{p}$, $T_j\bar{p}$.

Din (7) deducem:

$$P_i^{(n)}(\bar{p}) = \sum_{j \in I_{m+1}} A_j(\bar{p})\, P_i^{(n-1)}(T_j\bar{p}) \tag{8}$$

Aceasta este relaţia de recurenţă pe care o verifică probabilitatea totală şi care ne permite să determinăm, în condiţii destul de largi, unele proprietăţi de ergodicitate.

Teoremă

Dacă sînt îndeplinite următoarele condiţii:

I. Funcţiile fundamentale $\bar{\varphi}_i = (\varphi_{ij})$ sînt continue în domeniul Δ din R^m definit prin

$$(\Delta):\ 0 \leqslant p_i \leqslant 1,\ i \in I_m$$

și verifică relațiile

$$0 < \varphi_{ij}(\bar{p}) < 1, \; i \in I_{m+1}, \; j \in I_m.$$

II. Domeniul Δ este un spațiu metric complet în raport cu distanța euclidiană $\rho(\bar{p}, \bar{q})$, $\bar{p}$, $\bar{p} \in \Delta$ și pentru fiecare transformare $T_j\bar{p}: \Delta \to \Delta$, $j \in I_{m+1}, \bar{p} \in \Delta$ definită prin

$$p'_k = \varphi_{jk}(\bar{p}), \; k \in I_m,$$

avem:

$$\rho[T_j\bar{p}', T_j\bar{p}''] \leqslant \|T\|_j \cdot \rho(\bar{p}', \bar{p}''), \; j \in I_{m+1}, \; \bar{p}', \bar{p}'' \in \Delta,$$

astfel ca

$$\|T\|_j < 1, \; j = j_0.$$

$$\|T\|_j \leqslant 1; \; j \in I_{m+1}, \; j \neq j_0.$$

III. Funcțiile $A_j(\bar{p})$, $j \in I_{m+1}$, $\bar{p} \in \Delta$ sînt continue în Δ și

$$A_j(\bar{p}) > 0, \; \forall j \in I_{m+1}, \; \bar{p} \in \Delta.$$

$$|A_j(\bar{p}') - A_j(\bar{p}'')| < k \sum_{i \in I_{m+1}} |p'_i - p''_i|, \; \forall j \in I_{m+1}, \; \bar{p}, \bar{p}'' \in \Delta$$

IV. Există $i_0 \in I_{m+1}$ astfel ca

$$\lim_{n \to \infty} T_{i, \underbrace{i_0, i_0, \ldots, i_0}_{n}, j} \bar{p} \to \tilde{p}_j, \; \forall i, j \in I_{m+1} p \in \Delta.$$

avem

$\lim P_i^{(n)}(\bar{p}) = P_i^{\infty}$, unde P_i^{∞} este o constantă, independentă de $\bar{p}$, deci lanțul considerat este ergodic.

Demonstrație

Se poate arăta că în condițiile I — IV putem găsi o constantă M, astfel ca

$$|P_i^{(n)}(\bar{p}') - P_i^{(n)}(\bar{p}'')| < M. \rho(\bar{p}', \bar{p}''), \; \forall \bar{p}', \bar{p}'' \in \Delta, \; i \in I_{m+1} \tag{9}$$

Într-adevăr, ținînd seama de (8) deducem:

$$P_i^{(n)}(\bar{p}') - P_i^{(n)}(\bar{p}'') = \sum_{j \in I_{m+1}} [A_j(\bar{p}') - A_j(\bar{p}'')] \, P_i^{(n-1)}(T_j \bar{p}') +$$

$$+ \sum_{j \in I_{m+1}} A_j(\bar{p}'') [P_i^{(n-1)}(T_j\bar{p}') - P_i^{(n-1)}(T_j\bar{p}'')]$$

Rezultă:

$$|P_i^{(n)}(\bar{p}') - P_i^{(n)}(\bar{p}'')| \leqslant \sum_{j \in I_{m+1}} |A_j(\bar{p}') - A_j(\bar{p}'')| \, P_i^{(n-1)}(T_j\bar{p}') +$$

$$+ \sum_{j \in I_{m+1}} A_j(\bar{p}'') \, |P_i^{(n-1)}(T_j \bar{p}') - P_i^{(n-1)}(T_j \bar{p}'')| \tag{10}$$

Admitem că relația (9) este adevărată pînă la $n-1$. Vom arăta că este adevărată și pentru n.

Avem:

$$\left|\sum_{j\in I_{m+1}}(A_j(\bar{p}')-A_j(\bar{p}''))\,P_i^{(n-1)}(T_j\,\bar{p}')\right| \leqslant \sum_{j\in I_{m+1}}|A_j(\bar{p}')-A_j(\bar{p}'')| \leqslant$$

$$\leqslant k(m+1)\sum_{i\in I_{m+1}}|p_i'-p_i''| \leqslant 2\,k(m+1)\sqrt{m}\cdot\rho(\bar{p}',\,\bar{p}'')$$

$$\sum_{\in I_{m+1}}A_j(\bar{p}'')\,|P_i^{(n-1)}(T_j\bar{p}')-P_i^{(n-1)}(T_j\bar{p}'')| \leqslant M\sum_{j\in I_{m+1}}A_j(\bar{p}'')\cdot\rho(T_j\bar{p}',\,T_j\bar{p}'') \leqslant$$

$$\leqslant M\sum_{j\in I_{m+1}}A_j(\bar{p}')\|T\|_j\,\rho(\bar{p}',\,\bar{p}'') \leqslant M\rho(\bar{p}',\,\bar{p}'')\,[1-(1-\|T\|_{j_0})A_{j_0}(\bar{p}'')$$

Aceste două inegalități introduse în (6) ne dau:

$$|P_i^{(n)}(\bar{p}')-P_i^{(n)}(\bar{p}'')| \leqslant 2k(m+1)\sqrt{m}\rho(\bar{p}',\,\bar{p}'')+M\rho(\bar{p}',\,\bar{p}'')\,[1-$$

$$-(1-\|T\|_{j_0}A_{j_0}(\bar{p}'')]$$

Va fi suficient să luăm:

$$2k\,(m+1)\sqrt{m}+M[1-(1-\|T\|_{j_0})\,A_{j_0}(\bar{p}'')<M \tag{11}$$

pentru ca să avem:

$$|P_i^{(n)}(\bar{p}')-P_i^{(n)}(\bar{p}'')|<M\rho(\bar{p}',\,\bar{p}'').$$

Să notăm

$$\inf A_{j_0}(\bar{p})=A_{j_0}\neq 0 \quad \bar{p}\in\Delta$$

Dacă alegem pe M astfel ca:

$$M>\frac{2k(m+1)\sqrt{m}}{(1-\|T\|_{j_0})\,A_{j_0}}$$

inegalitatea (11) este evident satisfăcută.

Însă pentru $n=1$, inegalitatea (9) este satisfăcută, astfel încît ea este adevărată pentru orice n. Din această inegalitate rezultă că funcțiile $P_i^{(n)}(\bar{p})$ sînt egal continue în raport cu $\bar{p}$. În baza unei cunoscute teoreme a lui Arzelo, rezultă că există un șir parțial $P_i^{(\gamma k)}(\bar{p})$, $\bar{p}\in\Delta$,

astfel ca:

$$\lim_{k\to\infty}P_i^{(\gamma k)}(\bar{p})=P_i^{(\gamma)}(\bar{p}),\quad \bar{p}\in\Delta.$$

Fie acum

$$\overline{P_i^{(n)}}(\bar{p})=\sup_{\bar{p}\in\Delta}P_i^{(n)}(\bar{p}),\ \underline{P_i^{(n)}(\bar{q})}=\inf_{\bar{p}\in\Delta}P_i^{(n)}(\bar{p})$$

Obținem din (8):

$$0 \leqslant \overline{P_i^{(n)}}(\bar{p}) \leqslant \bar{P}_i^{(n-1)}(\bar{p})$$

$$1 \geqslant \underline{P_i^{(n)}(\bar{p})} \geqslant P_i^{(n-1)}(\bar{p})$$

Rezultă prin urmare:

$$\lim_{n\to\infty} \bar{P}_i^{(n)}(\bar{p}) = \bar{P}_i(\bar{p})$$

$$\lim_{n\to\infty} \bar{P}_i^{(n)}(\bar{p}) = \underline{P_i(\bar{p})}$$

$$0 \leqslant \underline{P_i(\bar{p})} \leqslant \overline{P_i(\bar{p})} \leqslant 1$$

De asemenea deducem din (8):

$$P_i^{(\gamma_{k+1})}(\bar{p}) = \sum A_j(\bar{p}) P_i^{(\gamma_k)}(T_j\bar{p}), \; j \in I_{m+1}$$

Deoarece șirul $P_i^{(\gamma_k)}$ $(T_j\bar{p})$ este convergent, rezultă din relația de mai sus că și șirul $P_i^{(\gamma_{k+1})}(\bar{p})$ este convergent și că limita lui $P_i^{(\gamma+1)}(\bar{p})$ verifică egalitatea:

$$P_i^{(\gamma+1)}(\bar{p}) = \sum_{j\in I_{m+1}} A_j(\bar{p}) \cdot P_i^{(\gamma)}[T_j\bar{p}] \tag{12}$$

Obținem astfel șirurile parțiale $P_i^{(\gamma_{k+1})}(\bar{p})$, $P_i^{(\gamma_{k+2})}(\bar{p})$, care sînt convergente către $P_i^{(\gamma+1)}(\bar{p})$, $P_i^{(\gamma+2)}(p)$,... avînd toate aceleași valori extreme.

Din relația (8) deducem.

$$P_i^{(\gamma+s)}(\bar{p}) = \sum A_{j_1}(\bar{p}) A_{j_2}(T_j\bar{p}) \ldots A_{j_s}(T_{j_1 j_2 \cdots j_{s-1}}\bar{p}) \; P_i^{(\gamma)}\,\overline{(T_{j_1 j_2 \cdots j_{s-1}})} \tag{13}$$

În baza acestei relații demonstrația în continuare este aceeași ca în [4]; de aceea nu o mai expunem.

3. Vom examina acum cazul lanțurilor liniare, referindu-ne la cazul egal alfa, studiat de R. Bush și F. Mosteller [1].
În acest caz operatorii sînt:

$$T_{1p} = ap + \lambda(1-a)$$

$$T_{2p} = ap_2 + \mu(1-a)$$

Funcția $A_1(p)$ este deasemenea liniară:

$$A_1(p) = mp + n$$

Relația (8) devine:

$$P^{(n)}(p) = (mp+n)\, P^{(n-1)}(ap + \lambda(1-a) + (1-mp-n)\, P^{n-1}[ap + \\ + \mu(1-a)] \tag{14}$$

Valoarea limită P^{∞} se poate calcula în acest caz în mod direct.

Într-adevăr, putem verifica că $P^{(2)}(p)$, $P^{(3)}(p)$, ... sînt polinoame de gradul întîi în p. $[P^{1}(p) = p]$

Să notăm:

$$P^{(n)}(p) = A_n p + B_n$$

Din (14) rezultă relațiile de recurență

$$\begin{aligned} A_n &= [\lambda m(1-a) - \mu m(1-a) + a] A_{n-1} \\ B_n &= [\lambda n(1-a) - \mu n(1-a) + \mu(1-a)] A_{n-1} + B_{n-1} \end{aligned} \tag{15}$$

Din datele problemei rezultă că trebuie să avem:

$$\begin{aligned} 0 &\leqslant mp + n \leqslant 1 \\ 0 &\leqslant ap + \lambda(1-a) \leqslant 1 \\ 0 &\leqslant ap + \lambda(1-a) \leqslant 1 \end{aligned} \tag{16}$$

oricare ar fi p cuprins în intervalul [0, 1].

Dacă în afară de (16), mai avem:

$$|\lambda m(1-a) - \mu m(1-a) + a| < 1, \tag{17}$$

Obținem din (15):

$$P_1^{\infty} = \frac{n\lambda + (1-n)\mu}{1 - m\lambda + m\mu} + n \tag{18}$$

În cazul particular, cînd $m = 1$, $n = 0$, avem:

$$P_1^{\infty} = \frac{\mu}{1 - \lambda + \mu}$$

adică rezultatul obținut, de R. Bush și F. Mosteller (5)

Din formula (18) constatăm că P_1^{∞} nu depinde de p, ceeace era de așteptat conform teoremei ergodice pe care am demonstrat-o și ale cărei condiții sînt îndeplinite.

Se constantă însă mai mult și anume că P_1^{∞} nu depinde nici de a, întocmai ca în cazul condiției egal alfa.

Cazul studiat prezintă interes pentru că permite să se calculeze momentele asimptotice de diferite ordine ale probabilităților la proba n rt prin urmare poate permite estimarea parametrilor în vederea diverselor aplicații.

4. Să considerăm expresia:

$$A_i(T_{j_1, j_2, \ldots, j_{n-1}} \bar{p})$$

Ea reprezintă probabilitatea ca după succesiunea de răspunsuri $a_{j_1}, a_{j_2}, \ldots a_{j_{n-1}}$, în primele n probe, să se obțină răspunsul a_i. Cum primele $(n-1)$ răspunsuri se produc cu anumite probabilități, reiese că $A_i(T_{j_1, \ldots, j_{n-1}}\bar{p})$ este o variabilă aleatoare.

Din (7) rezultă că:

$$M[A_i(T_{j_1, \ldots, j_{n-1}}\bar{p})] = P_i^{(n)}(\bar{p}) \tag{19}$$

și prin urmare, în condițiile teoremei pe care am demonstrat-o

$$\lim_{n\to\infty} M[A_i(T_{j_1, \ldots, j_{n-1}}\bar{p}] = P_i^{\infty} \tag{20}$$

Să considerăm variabila aleatoare:

$$\xi_{j_1, j_2, \ldots, j_{n-1}} = \frac{1}{n}\sum_{s=1}^{n-1} A_i(T_{j_1 \ldots j_s}\bar{p}) \tag{21}$$

În baza relației (20) putem scrie:

$$\lim_{n\to\infty} M(\xi_{j_1 \ldots j_{n-1}}) = P_i^{\infty} \tag{22}$$

Se poate arăta că:

$$\lim_{n\to\infty} D^2(\xi_{j_1 \ldots j_{n-1}}) = 0, \tag{23}$$

astfel încît pentru determinarea lui P_i^{∞} vom putea folosi metoda Monte Carlo.

Vom aplica această metodă la procesul de învățare

$$T_{1p} = 0{,}5\ p + 0{,}4$$

$$T_{2p} = -\ 0{,}2\ p + 0{,}6$$

aplicînd principiul majorității în cazul cînd sînt trei persoane.

Dacă la proba n probabilitatea alegerii operatorului T_{1p} este p_n, atunci acest operator este ales cu probabilitatea

$$p_n^3 + 3p_n^2(1 - p_n) = 3p_n^2 - 2p_n^3$$

iar operatorul T_{2p} cu probabilitatea contrarie.

Experiența pornește de la condiții inițiale diferite:

$$p = 0{,}1 \text{ și } p = 0{,}9$$

Cele două serii de rezultate obținute sînt următoarele:

Tabel nr. 1

Nr. crt.	Număr întîmplător	Probabilitatea p_n	Probabilitatea $3p_n^2-2p_n^3$	Operator T $T_1 = 0,5\,p + 0,4$ $T_2 = -\,0,2\,p + 0,6$
1	0,2215	0,100	0,028	T_2
2	0,0594	0,580	0,619	T_1
3	0,2537	0,690	0,771	T_1
4	0,8186	,0745	0,839	T_1
5	0,9810	0,772	0,868	T_2
6	0,8101	0,446	0,419	T_2
7	0,7102	0,511	0,517	T_2
8	0,4919	0,498	0,497	T_1
9	0,3087	0,649	0,717	T_1
10	0,0308	0,724	0,814	T_1
11	0,1666	0,762	0,858	T_1
12	0,5200	0,781	0,875	T_1
13	0,5997	0,790	0,886	T_1
14	0,5094	0,795	0,892	T_1
15	0,2424	0,797	0,893	T_1
16	0,9096	0,798	0,894	T_2
17	0,2180	0,440	0,410	T_1
18	0,5496	0,620	0,676	T_1
19	0,9815	0,710	0,798	T_2
20	0,8458	0,458	0,438	T_2
21	0,9541	0,508	0,512	T_2
22	0,9220	0,498	0,498	T_2
23	0,3271	0,500	0,500	T_1

continuare

Nr. crt.	Număr întîmplător	Probabilitatea p_n	Probabilitatea $3p_n^2-2p_n^3$	Operator T $T_1 = 0,5\,p + 0,4$ $T_2 = -\,0,2\,p + 0,6$
24	0,1704	0,650	0,718	T_1
25	0,8659	0,725	0,816	T_2
26	0,9539	0,455	0,439	T_2
27	0,0375	0,509	0,515	T_1
28	0,9497	0,655	0,715	T_2
29	0,8086	0,469	0,452	T_2
30	0,9535	0,506	0,510	T_2

Tabel nr. 2

Nr. crt.	Număr întîmplător	Probabilitatea p_n	Probabilitatea $3p_n^2\ 2p_n^3$	Operator T $T_1 = 0.5\,p + 0,4$ $T_2 = -\,0,2p + 0,6$
1	0,2215	0,900	0,972	T_1
2	0,0594	0,850	0,950	T_1
3	0,2537	0,258	0,918	T_1
4	0,8186	0,813	0,908	T_1
5	0,9810	0,806	0,902	T_2
6	0,8101	0,439	0,409	T_2
7	0,7102	0,512	0,522	T_2
8	0,4919	0,498	0,497	T_1
9	0,3087	0,649	0,717	T_1
10	0,0308	0,724	0,814	T_1
11	0,1666	0,762	0,858	T_1

Se constată că după 7 probe, cele două serii de date coincid, ceea ce corespunde proprietăţii ergodice generale pe care am demonstrat-o. Se vede astfel că tinderea la limită către probabilitatea finală este rapidă.

BIBLIOGRAFIE

(1) D. G. Hays and R. R. Bush: *A study of group action* Readings in Mathematical Psichology, vol. II, J. Wiley, 1964.

(2) M. Iosifescu: *Asupra comportării asimptotice a lanțurilor cu legături complete* (Comunicările Acad. R.P.R., 1960)

(3) O. Onicescu, G. Mihoc: *Sur les chaînes des variables statistiques*, C. R. Acad. Sciences Paris, 1935.

4) G. Mihoc: *Teorema ergodică pentru lanțurile cu legături complete multiple*. Analele Universității București 1962.

(5) R. Bush, F. Mosteller: *Stochastic Models for Learning*, J. Wiley, 1955.

ОТНОСИТЕЛЬНО ДЕЙСТВИЯ НЕКОЙ ГРУППЫ, КОТОРАЯ РАЗВИВАЕТСЯ НА ОСНОВАНИИ РЯДА ПЕРЕМЕННЫХ СВЯЗАННЫХ ПОЛЬНОЙ ЦЕПНОЙ СВЯЗЬЮ.

Краткое содержание

Рассматривается процесс обучения, который применяется к некоторому количеству «k» индивидумов, на основании принципа большинства.

Рассматривается простая, однородная цепь *(OM)*. Предполагая, что существуют две возможности A_1, A_2, обозначаем через p_n вероятность выбора для одного индивидума A_n, при пробе порядка n

Допускаем, что распределение вероятности для количества «k» индивидумов одинаково. В этом случае при вероятности (1), где $\left[\frac{k}{2}\right]$ представляет наибольшее число содержащееся в $\frac{k}{2}$, вся группа выбирает A_2, а с вероятностью (2) выбирает A_2. Иными словами, если для большинства индивидумов вышло значение A_i, $(i = 1,2)$ это значение считается вышед щим для всех индивидумов, и для следующей пробы применяется правило простой, однородной цепи с предыдущей вероятностью p_n с осуществленной пробой A_i.

Обозначаем через $P_i^{(n)}(p)$ вероятность получения с помощью пробы n значения $A_i (i = 1,2)$, зная, что начальная вероятность $P_i^{(i)}(p) = p$ и что даются удовлетворительные условия для того чтобы

$$\lim_{n \to \infty} P_i^{(n)}(p) = P_i^{\infty}$$

где P_i^{∞} является постоянной независимой от p.

Теорема доказывается в случае когда m значения $A_1, A_2, \ldots, A_m$, тогда когда вероятности выбора этих значений являются соответственно $A_i(\bar{p})$, $(i = 1, 2, \ldots, m)$. Функции $A_i(\bar{p})$ являются данными.

Primit la 19.VIII.1971

Institutul Politehnic
București

STUDIUL UNOR PROCESE DE FABRICAȚIE CU AJUTORUL LANȚURILOR MARKOV ABSORBANTE

FLORIN-CRISTIAN GHEORGHE și GEORGE OBREJA

1. INTRODUCERE

Există multe procese de fabricație în care după un număr aleator de etape de funcționare normală, se trece la o stare de dereglare cu aspect permanent (avînd caracter absorbant).

Intervenția obiectivă în procesul de fabricație a factorilor stochastici, face ca problema descoperirii stărilor de dereglare permanentă să devină abordabilă prin metode nedeterminate.

Pentru a fixa ideile, să considerăm intervalul de toleranță $[T_i, T_s$ a unei caracteristici de calitate X obținută în procesul respectiv, împărțit în s zone distincte. La acestea se adaogă cele două zone exterioare intervalului $[T_i, T_s]$ (a se vedea fig. 1).

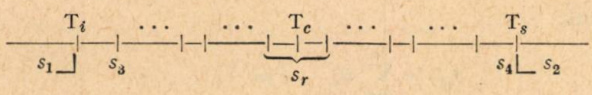


Fig. 1

Aceste zone nu sînt neapărat de aceeași lungime. Se observă că zona s_r centrată în T_c, mijlocul cîmpului de toleranță, este o zonă de mare precizie. Această precizie scade pe măsură ce ne apropiem de limitele T_i și T_s.

Zonele s_3 și s_4 le vom considera zone de alarmă, deoarece valorile caracteristicii X odată situate în acestea, indică un pericol de trecere către s_1 sau s_2 zone ce reprezintă stări de funcționare *anormală permanentă* a procesului. Revenirea la funcționarea normală se face numai prin oprirea procesului pentru o nouă reglare a instalației.

Se observă că acestui proces i se poate atașa un lanț Markov absorbant cu un număr finit de stări $r = s + 2$, din care cele s zone incluse în$[T_i, T_s]$ reprezintă stările neabsorbante, iar zonele s_1 și s_2 sînt stările absorbante ale lanțului.

Matricea probabilităţilor de trecere corespunzătoare acestui lanţ, are forma următoare

$$P = \begin{array}{c} \\ s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ \vdots \\ s_r \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} s_1 & s_2 & s_3 & \dots & s_r \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} & \dots & p_{3r} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_{r1} & p_{r2} & p_{r3} & & p_{rr} \end{pmatrix} \end{array} \tag{1}$$

unde p_{ij}, $\forall\, i, j = 1, 2, \dots, r$ reprezintă probabilitatea de trecere din starea i în starea j, adică

$$p_{ij} = P_r\,[X_l = s_j \mid X_{l-1} = s_1]. \tag{2}$$

Pentru abordarea problemei enunţate mai sus, sînt necesare anumite consideraţiuni de natură teoretică asupra lanţurilor Markov absorbante a căror rezolvare o prezentăm mai jos.

2. FUNCŢIA CARACTERISTICĂ PENTRU LANŢURILE MARKOV ABSORBANTE CU UN NUMĂR FINIT DE STĂRI.

Fie $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$, variabilele lanţului considerat. Se defineşte η_j ca o funcţie care dă numărul total de perioade în care procesul se găseşte în starea s_j.

Avem astfel:

$$\eta_j = \sum_{k=0}^{\infty} u_j^k \qquad j = 1, \dots, s \tag{3}$$

unde u_j^k se defineşte astfel $u_j^k = \chi(X_k = s_j)$, fiind indicatorul evenimentului considerat

$$u_j^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ p_{ij}^{(k)} & 1 - p_{ij}^{(k)} \end{pmatrix} \text{ cu } p_{ij}^{(k)} = \sum_{l=1}^{r} p_{il}^{(k-1)} p_{lj} \tag{4}$$

k reprezentînd numărul de etape parcurse de lanţ.

Repartiţia variabilei aleatoare η_j este dată într-o lucrare anterioară [3], avînd următoarea formă

$$\{P_i[\eta_j - \delta_{ij} = k]\} \begin{cases} E - (N - I)\, N_{dg}^{-1} & \text{dacă } k = 0 \\ (N - I)\, N_{dg}^{-2} (I - N_{dg}^{-1})^{k-1} & \text{dacă } k > 0 \end{cases} \tag{5}$$

în care

— I este matricea identică de ordinul s;

— E matricea pătrată de ordinul s cu toate intrările 1;

— $N = (I - Q)^{-1}$ este matricea fundamentală a lanțului, iar Q este matricea pătratică de ordinul s, care se referă la lanț atîta timp cît acesta rămîne în stările de trecere.

Folosind în (5) notația

$$H = (N - I)\, N_{dg}^{-1} \tag{6}$$

se obține

$$\{Pr_i[\eta_j - \delta_{ij} = k]\} = \begin{cases} E - H & \text{dacă } k = 0 \\ HH_{dg}^{k-1}[I - H_{dg}] & \text{dacă } k > 0 \end{cases} \tag{7}$$

Teoremă. Funcția caracteristică pentru variabila $\eta_j - \delta_{ij}$ este dată de relația

$$\varphi_{ij}(t) = 1 - h_{ij} + h_{ij} \frac{(1 - h_{ij})\, e^{it}}{1 - h_{jj} e^{it}} \tag{8}$$

unde h_{ij} sînt intrările matricii H.

Demonstrație.

Pornind de la definiție, obținem

$$\varphi_{ij}(t) = M_i[e^{it(\eta_j - \delta_{ij})}] = \sum_{k=0}^{\infty} e^{itk} P_i[\eta_j - \delta_{ij} = k] =$$

$$= 1 - h_{ij} + \sum_{k=1}^{\infty} e^{itk} h_{ij} h_{jj}^{k-1}(1 - h_{jj}) = 1 - h_{ij} + h_{ij} h_{jj}^{-1}(1 - h_{jj}) \sum_{k=1}^{\infty} e^{itk} h_{jj}^{k} =$$

$$= 1 - h_{ij} + h_{ij} h_{jj}^{-1}(1 - h_{jj}) \left[\sum_{k=0}^{\infty} (e^{it} h_{jj})^k - 1 \right]$$

Deoarece, $|e^{it} h_{jj}| < 1$ și $h_{jj} < 1$, avem

$$\varphi_{ij}(t) = 1 - h_{ij} + h_{ij} h_{jj}^{-1}(1 - h_{jj}) \left(\frac{1}{1 - h_{jj} e^{it}} - 1 \right) = 1 - h_{ij} + h_{ij} \frac{(1 - h_{jj}) e^{it}}{1 - h_{jj} e^{it}}.$$

În forma matricială vom avea

$$\{\varphi_{ij}(t)\} = E - H + H \frac{I e^{it}}{I - H_{dg} e^{it}} [I - H_{dg}] \tag{9}$$

Pornind de la funcția caracteristică, putem obține cu ușurință momentele variabilei $\eta_j - \delta_{ij}$.

Notînd cu $N_1, N_2, \ldots, N_p, \ldots$ momentele necentrate sub forma matricială, avem

$$N_1 = \frac{1}{i} \{\varphi_{ij}(t)\}'_{t=0}$$

$$N_2 = \frac{1}{i^2} \{\varphi_{ij}(t)\}''_{t=0}$$

$$\vdots$$

$$N_p = \frac{1}{i^p} \{\varphi_{ij}(t)\}^{(p)}_{t=0}.$$

Folosind (9), obţinem

$$N_1 = \left(H \frac{Ie^{it}}{[I - H_{dg}e^{it}]^2} [I - H_{dg}]\right)_{t=0} = H(I - H_{dg})^{-1}.$$

Folosind relaţia (6), avem

$$N_1 = (N - I) N_{dg}^{-1}[I - (N_{dg} - I) N_{dg}^{-1}]^{-1} = (N - I) \tag{10}$$

$$N_2 = \left(H \frac{Ie^{it} + H_{dg}e^{2it}}{[I - H_{dg}e^{it}]^3} [I - H_{dg}]\right)_{t=0} = H \frac{I + H_{dg}}{[I - H_{dg}]^2}.$$

Ţinînd seama tot de (6), obţinem

$$N_2 = (N - I) N_{dg}^{-1} \frac{I + (N_{dg} - I) N_{dg}^{-1}}{[I - (N_{dg} - I) N_{dg}^{-1}]^2} = (N - I)(2N_{dg} - I) \tag{11}$$

Procedînd ca mai sus, obţinem

$$N_3 = (N - I)[\sum_{k=1}^{2} C_3^k[(N - I) N^{-1} N_{3-k}]_{dg} + I]. \tag{12}$$

Prin inducţie, se demonstrează cu uşurinţă că

$$N_p = (N - I)\left[\sum_{k=1}^{p-1} C_p^k[(N - I) N^{-1} N_{p-k}]_{dg} + I\right]. \tag{13}$$

Momentele centrale M_p sînt calculate în lucrarea [3].

Pentru scopul urmărit de noi, reţinem momentul centrat de ordinul doi (dispersia variabilei $\eta_j - \delta_{ij}$)

$$D_i^2(\eta_j - \delta_{ij}) = M_i[(\eta_j - \delta_{ij})^2] - (M_i[\eta_j - \delta_{ij}])^2$$

sau sub formă matricială

$$\{D_i^2(\eta_j - \delta_{ij})\} = (N - I)[2N_{dg} - I] - N_{sq}, \tag{14}$$

unde N_{sq} este matricea avînd intrările $(M_i[\eta_j - \delta_{ij}])^2$.

3. ESTIMAȚII PENTRU PARAMETRII p_{ij} AI LANȚULUI

Problema estimației probabilităților de trecere pentru lanțurile Markov, a fost tratată de Gh. Mihoc [6] și [7].

Pentru o clasă largă de lanțuri Markov și în condiții generale, în aceste lucrări se arată că estimațiile $\bar{p}_{ij}$ obținute ca frecvențe dintr-o selecție ordonată, sînt corecte și asimptotic eficiente. De asemenea, se demonstrează că legea mixtă de probabilitate a acestor estimații este asimptotic normală. P. Billingsley [2] folosind funcția de verosimilitate atașată unei selecții ordonate, obține estimații consistente pentru parametrii unui proces Markov cu timp discret în condiții de regularitate.

Tot în lucrarea menționată, se dau teste pentru verificarea ipotezei nule.

Aplicarea acestei teorii la lanțurile Markov cu un număr finit de stări, este posibilă numai în cazul lanțurilor cu o singură mulțime ergodică și fără stări de trecere (ex. cazul lanțurilor regulate).

Vom încerca să arătăm, în expunerea ce urmează, că în anumite condiții această teorie poate fi aplicată și în cazul lanțurilor Markov absorbante.

Toată problema revine la a înlocui lanțul absorbant printr-un alt lanț care să satisfacă condițiile pentru care teoria expusă de Billingsley este valabilă.

Pentru lanțul Markov absorbant, descris de matricea de trecere (1), fie

$$\pi = \{p_1, p_2, \dots, p_r\} \tag{15}$$

vectorul probabilităților inițiale.

Ori de cîte ori acest lanț ajunge într-o stare absorbantă, este pornit din nou cu același vector inițial π.

Lanțul astfel rezultat, este un nou lanț Markov cu matricea de trecere dată prin

$$P' = \left(\begin{array}{c|c} p_1\ p_2 & p_3, \dots p_r \\ \hline p_1\ p_2 & p_3, \dots p_r \\ \hline R & Q \end{array}\right) \tag{16}$$

În [5] se demonstrează următoarea teoremă.

Teoremă. Matricea P', astfel obținută, reprezintă un lanț Markov cu o singură mulțime ergodică.

În acest mod, se observă că se pot obține estimații atît pentru probalitățile de trecere din matricele R și Q, cît și pentru probalitățile vectorului inițial π.

Pentru cele ce urmează, vom rezuma unele rezultate de bază din [2], care ne vor servi pentru continuarea studiului nostru.

Presupunem că probalitățile de trecere $p_{ij}(\theta)$ depind de un parametru $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_r)$ necunoscut pe care vrem să-l estimăm cu ajutorul unei selecții ordonate (în ordinea de succesiune a lanțului)

$$x_1, x_2, \dots, x_{N+1} \tag{17}$$

fiecare variabilă x_k putînd lua oricare din valorile $(s_1, \dots, s_r)$.

Fie N_{ij} numărul de ori a realizării perechii ordonate (s_i, s_j) în selecţia dată. Notăm cu D mulţimea perechilor (i, j), astfel încît oricare ar fi perechea $(i, j) \in D$ să avem:

$$p_{ij}(\theta) > 0.$$

Logaritmul funcţiei de verosimilitate ataşată selecţiei, este în cazul nostru

$$L_N(\theta) = \sum_D N_{ij} \lg P_{ij}(\theta). \tag{18}$$

Sistemul de verosimilitate maximă devine

$$\frac{\partial}{\partial \theta_u} L_N(\theta) = \sum_D \frac{N_{ij}}{p_{ij}(\theta)} \frac{\partial p_{ij}(\theta)}{\partial \theta_u} = 0 \quad u = 1, 2, \dots, r. \tag{19}$$

În această situaţie se demonstrează că:

Teoremă. Dacă sînt satisfăcute următoarele condiţii:

a) mulţimea D a perechilor (i, j) pentru care $p_{ij}(\theta)$ este independentă de θ;

b) $p_{ij}(\theta)$ are derivate parţiale de ordinul trei continue pe tot spaţiul parametrilor;

c) Matricea $d \times r$

$$\left(\frac{\partial p_{ij}(\theta)}{\partial \theta_u}\right)_{(i,j) \in D} u = 1, \dots, r$$

(d fiind numărul elementelor din D) are rangul r.

d) Pentru orice θ, lanţul este cu o singură mulţime ergodică şi fără stări de trecere.

Atunci există o soluţie $\bar{\theta} = \bar{\theta}(x_1, \dots, x_{N+1})$ consistentă a sistemului (19). Acest estimator consistent obţinut prin metoda verosimilităţii maxime, este aproape sigur un maxim local pentru $L_N(\theta)$.

Mai mult, dacă θ^0 este adevărata valoare a vectorului θ, atunci statistica Neyman-Pearson

$$2[\max_\theta L_N(\theta) - L_N(\theta)] = \sum_D N_{ij} \lg \left(\frac{p_{ij}(\bar{\theta})}{p_{ij}(\theta^0)}\right) \tag{20}$$

converge slab (în repartiţie) către o repartiţie χ^2_r. În plus avem

$$\sqrt{N}(\bar{\theta} - \theta^0) \xrightarrow{p} 0 \tag{21}$$

şi

$$\sqrt[3]{N}\, |p_{ij}(\bar{\theta}) - p_{ij}(\theta^0)| \xrightarrow{p} 0 \tag{22}$$

Să considerăm acum

$$p_{ij}(\theta) = p_{ij}$$

$$\text{cu } p_{ij} > 0,\ (i, j) \in D \text{ și } \sum_{D_i} p_{ij} = 1.$$

Logaritmul funcției de verosimilitate devine

$$L_N = \sum_D N_{ij} lg\, p_{ij}.$$

Noi trebuie să găsim însă, acele valori p_{ij} care maximizează pe L_N avînd condiția

$$\sum_{D_i} p_{ij} = 1.$$

Folosind multiplicatorii lui Lagrage, se găsește ușor că acest maxim este dat de

$$\bar{p}_{ij} = \frac{N_{ij}}{N_i},$$

unde $N_i = \sum_{D_i} N_{ij}$ reprezintă frecvența de apariție a stării i în selecție.

Prin urmare, dacă $P^0 = (p^0_{ij})$ este adevărata matrice a procesului, atunci $\bar{p}_{ij} = \frac{N_{ij}}{N_i}$ este estimația de verosimilitate maximă pentru p^0_{ij}.

Statistica Neyman-Pearson pentru testarea ipotezei $H_0 : P = P^0$ este

$$2[\max_D L_N - L^0_\Lambda] = \sum_D N_{ij}\, lg \frac{N_{ij}}{N_i p^0_{ij}}$$

și tinde către χ^2_{d-s}.

De asemenea, Bartlett a demonstrat că

$$2\sum_D N_{ij}\, lg \frac{N_{ij}}{N_i p^0_{ij}} \xrightarrow{r} \sum_D \frac{(N_{ij} - N_i p^0_{ij})^2}{N_i p^0_{ij}}.$$

Se demonstrează că repartiția mixtă de probabilitate a variabilelor $(l_1(N), \dots, l_r(N))$ cu $l_s(N) = N^{1/2}(\bar{p}_{ij} - p^0_{ij})$ este o repartiție normală multidimensională.

Această teoremă permite deci, estimarea probabilităților de trecere din matricea P' cu datele de observație asupra lanțului. Mai mult, deoarece componentele vectorului inițial se găsesc printre elementele matricii P', se poate găsi un estimator corect și pentru acesta.

Matricea P' fiind o matrice ergodică, rezultă că are un vector limită $\alpha = \alpha(a_1, a_2, \dots, a_r)$ care verifică condiția de staționaritate

$$\alpha = \alpha P'. \tag{23}$$

Prin urmare, obţinînd estimaţii prin metoda verosimilităţii maxime pentru P' şi α, aceste estimaţii notate respectiv cu $\bar{P}'$ şi $\bar{\alpha}$, trebuie să verifice la limită condiţia de staţionaritate.

Adică, pentru $N \to \infty$ trebuie să avem

$$\bar{\alpha} = \bar{\alpha}\,\bar{P}'. \tag{24}$$

Pentru aceasta, să considerăm selecţia (17) de lungime mare.

Fie Ni numărul de apariţii a stării s_i în selecţia dată.

În acest caz, avem relaţiile:

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{r} N_i = N \\ &\sum_{j=1}^{r} N_{ij} = N_{i.} \\ &\sum_{i=1}^{r} N_{ij} = N_{oj}. \end{aligned} \tag{25}$$

Se observă că

$$N_{i.} = N_i - 1$$

dacă ultima valoare a luat valoarea s_i sau

$$N_{i.} = N_i$$

dacă ultima valoare este diferită de s_i.

Aceasta se mai scrie

$$N_{.i} = N_i - s_{il} \tag{26}$$

l fiind ultima valoare a şirului de date.

În mod analog

$$N \cdot i = N_i - \delta_{il_1} \tag{27}$$

l_1 fiind prima valoare din şir.

Estimaţiile de verosimilitate maximă pentru a_i şi p_{ij} sînt:

$$\bar{a}_i = \frac{N_i}{N}\ ;\ \bar{p}_{ij} = \frac{N_{ij}}{N_i}.$$

Deci, a j-a componentă a vectorului linie $\bar{\alpha}\bar{P}'$ va fi

$$\sum_{i=1}^{r} \bar{a}_i \bar{p}_{ij} = \sum_{i=1}^{r} \frac{N_i}{N} \frac{N_{ij}}{N_{i.}} = \sum_{i=1}^{r} \frac{N_{i.} + \delta_{il}}{N} \cdot \frac{N_{ij}}{N_{i.}} = \sum_{i=1}^{r} \frac{N_{ij}}{N} + \sum_{i=1}^{r} \frac{\delta_{il} N_{ij}}{N N_{i.}} =$$

$$= \frac{N_{.j}}{N} + \frac{N_{lj}}{N N_{l.}}$$

Deoarece $N'_{.j} = N_j - \delta_{jl_1} = N_j - \delta_{jl}$ avem

$$\sum_{i=1}^{r} \bar{a}_i \bar{p}_{ij} = \frac{N_j}{N} - \frac{\delta_{jl_1}}{N} + \frac{N_{lj}}{NN_{l.}} = \bar{a}_j + \frac{1}{N}\left(\frac{N_{lj}}{N_l} - \delta_{jl_1}\right). \tag{29}$$

Prin urmare, pentru N suficient de mare, avem condiția de staționaritate fiind îndeplinită.

$$\bar{\alpha}\bar{P}' = \bar{\alpha} \tag{30}$$

Conform celor de mai sus, pentru alegerea lungimii selecției ordonate, necesară estimării componentelor vectorului α și a elementelor matricii de trecere $\bar{P}'$, trebuie să se țină seama de relația (24).

Pe de altă parte, componentele lui $\alpha = \alpha\ (a_1, a_2, \ldots, a_2)$ pot fi grupate în doi vectori: $\alpha_1\ (a_1, a_2)$ pentru stările inițiale absorbante și $\alpha_2\ (a_3, \ldots, a_r)$ pentru stările inițial de trecere. Se știe [5] că $\alpha_1\ \xi$(cu $\xi = \binom{1}{1}$) este o constantă pozitivă $\alpha_1 \xi > 0$. Se poate împărți vectorul α prin această constantă și obținem vectorul

$$\beta = \frac{1}{\alpha_1 \xi}(\alpha_1, \alpha_2). \tag{31}$$

Un rezultat clasic stabilește că $\frac{a_1}{\alpha_1 \xi}$ și $\frac{a_2}{\alpha_1 \xi}$ reprezintă probabilitățile de absorbție în starea s_1 și respectiv s_2, iar $\frac{a_3}{\alpha_1 \xi}, \ldots, \frac{a_r}{\alpha_1 \xi}$ reprezintă numărul mediu de etape în care procesul se găsește în starea s_j, cu $_J = 3, \ldots, r$ avînd dat vectorul inițial π

$$\frac{a_j}{\alpha_1 \xi} = n_{ij} = M_\pi[\eta_j]\ _J = 3, \ldots, r. \tag{32}$$

În acest fel, putem obține din datele de observație estimații pentru componentele vectorului β, sub forma

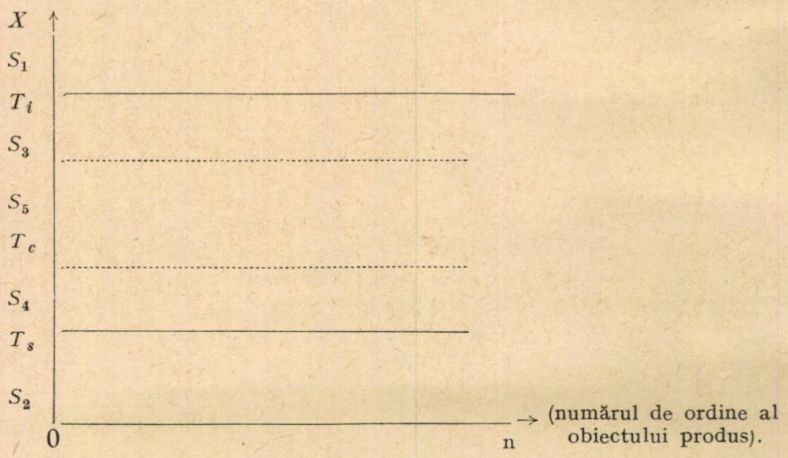
$$\bar{\beta}_j = \frac{N_j}{N_1 + N_2}\ _J = 1, \ldots, r.$$

Pentru $_j = 1, 2$ obținem estimații pentru probabilitățile de absorbție, iar pentru $_j = 3, 4, \ldots, r$ avem estimații pentru numărul mediu de etape n_{ij} corespunzătoare vectorului de pronire dat.

Aplicație.

S-a arătat în paragraful 1, că unele procese de fabricație pot fi descrise într-o primă aproximație cu ajutorul unui lanț Markov absorbant cu un număr finit de stări.

Ca o aplicaţie a celor de mai sus, vom considera că numărul stărilor este egal cu 5, astfel cum se arată în figura următoare:



Stările absorbante sînt zonele s_1 şi s_2 iar, s_5 este zona de mare precizie şi se consideră că procesul porneşte cu reglajul în centrul acestei zone T_c. Deci, vectorul iniţial va fi $\pi = \pi\ (0, 0, 0, 0, 1)$

Zonele s_3 şi s_4 de întindere mai mică, vor fi zone de alarmă care împreună cu zona s_5 formează stările de trecere.

Matricea de trecere P corespunzătoare este

$$\begin{array}{c} \\ s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ s_4 \\ s_5 \end{array} \begin{pmatrix} s_1 & s_2 & s_3 & s_4 & s_5 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} & p_{34} & p_{35} \\ p_{41} & p_{42} & p_{43} & p_{44} & p_{45} \\ p_{51} & p_{52} & p_{53} & p_{54} & p_{55} \end{pmatrix} \tag{34}$$

Conform teoriei expuse mai sus, se trece de la matricea P la matricea P′ formată dintr-o singură mulţime ergotică

$$P' = \left(\begin{array}{cc|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline p_{31} & p_{32} & p_{33} & p_{34} & p_{35} \\ p_{41} & p_{42} & p_{43} & p_{44} & p_{45} \\ p_{51} & p_{52} & p_{53} & p_{54} & p_{55} \end{array}\right) \tag{35}$$

Scopul urmărit de noi, este de a verifica, cu ajutorul unei selecţii obţinute în ordinea de succesiune a procesului

$$x_1, x_2, \dots, x_{N+1}$$

ipoteza $H_0^\pi: P = P^0$

Valorile p_{ij}^0 se aleg în aşa fel, încît probabilităţile trecerii în stările absorbante s_1 şi s_2 să fie foarte mici în raport cu celelalte valori.

Dacă ipoteza $P = P^0$ se verifică, atunci putem afirma cu o probabilitate 1-q (q fiind riscul de ordinul I), că procesul se desfăşoară normal. În caz contrar, procesul trebuie oprit şi pornit din nou (după o eventuală reglare) cu acelaş vector iniţial π.

Ipoteza H_0^π se verifică, după cum am văzut, cu ajutorul statisticii

$$\chi^2_{d-s} = \sum_D \frac{(N_{ij} - N_i p_{ij}^0)^2}{N_i p_{ij}^0}. \tag{36}$$

În cazul nostru, în D intră 17 perechi (i, j) pentru care $p_{ij} > 0$, iar d-s = 12 grade de libertate.

Prin urmare, la o eroare de genul I, q dată, verificarea decurge astfel:

—Din selecţia luată, se calculează N_{ij} şi N_i;

— Pentru valorile p_{ij}^0 alese se calculează statistica (36)

Dacă $\sum_D \frac{(N_{ij} - N_i p_{ij}^0)^2}{N_i p_{ij}^0} \leqslant \chi^2_{12}$; q se acceptă ipoteza H_0^π.

În caz contrar, ipoteza de nul H_0^π se respinge.

Se poate observa uşor, că din selecţia dată se obţin estimaţii pentru probabilităţile de absorbţie şi pentru numărul mediu de etape într-o stare de trecere înainte ca procesul să fie absorbit.

Aceste estimaţii se calculează prin relaţiile (33).

BIBLIOGRAFIE

1. Bartlett, M. : *The frequency goodness of fit test for probability chains.* Proc. Camb. Phill. Soc. Vol. 47 (1951), p. 86—95
2. Billingsley P.: *Statistical inference for Markov processes. University of Chicago Press,* Chicago (1961)
3. Gheorghe F. C.: *Some considerations on absorbing finite staite Markov chians.* (Sub tipar)
4. Gheorghe F. C. şi Obreja G.: *Aplicaţii ale lanţurilor Markov regulate la controlul statistic.* Revista de Statistică №5/1973
5. Kemeny, I. and Snell, L.: *Finite Markov chains.* Van Nostrand Princeton, New Jersey (1960)

6. Mihoc Gh. : *Funcţii de estimaţie eficiente pentru şiruri de variabile dependente.* Buletinul matematic al Societăţii de ştiinţe matematice şi fizice din RPR, Bucureşti (1957)
7. Mihoc Gh.: *Estimaţia probabilităţilor de trecere ale unui lanţ Markov.* Congresul al IV-lea de matematici din RPR, Bucureşti (1954)
8. Mihoc Gh., Firescu D. : *Statistica matematică.* Editura didactică şi pedagogică, Bucureşti (1966).

L'ÉTUDE SUR CERTAINS PROCESSUS DE FABRICATION A L'AIDE DES CHAINES DE MARKOV ABSORBANTES

RÉSUMÉ

Ce travail présente un essai de modelage indéterministe (probabiliste) de certains processus de fabrication qui se développent d'après la loi de probabilité d'une chaine de Markov absorbante.

Dans la première partie, par le moyen de la fonction de répartition (que nous avons établie dans une étude antérieure) de la variable qui représente le nombre d'étapes dans un certain état de passage, on obtient la fonction caractéristique de la variable respective, ainsi que les moments correspondants d'ordre p.

Ensuite, ayant en vue la théorie générale, on obtient l'estimation pour les probabilités de passage p_{ij} de la chaine absorbante, ainsi que le test de verification de l'hypothèse de nul $H_0 : P = P^0$.

Dans la dernière partie, on fait l'application de la théorie décrite plus haut, dans le cas d'une chaine absorbante à cinq états où les deux premiers états sont des états absorbants.

Académie de la République Socialiste de Roumanie
Centre de Statistique Mathématique

Redactor principal: ŞTEFANIA BARAU

ANALELE UNIVERSITĂŢII BUCUREŞTI
Matematică — Mecanică Anul XXI — Nr. 2 — 1972

Lei 12